

EXERCICE 2 : Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

- i) Vérifier que la partie A est bornée et déterminer ensuite $\sup A$, $\max A$ et $\inf A$.
ii) $\min A$ existe-t-il? Justifier votre réponse.
-

EXERCICE 2 : Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m}, m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

i) Vérifions que la partie A est bornée et déterminons ensuite $\sup A$, $\max A$ et $\inf A$. En effet, pour tout $x \in A$, $\exists n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ et $0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq 2$. Par suite A est une partie majorée par 2 et minorée par 0. Puisque $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \in A$, il s'ensuit que $\max A = 2$ et ainsi $\sup A = \max A = 2$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Le nombre $x_0 = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} \in A$. Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in A, 0 < x < 0 + \varepsilon$. D'où $\inf A = 0$. (3 pts)

ii) $\min A$ n'existe pas, car $0 \notin A$ puisque $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \neq 0$. (1 pt)

=====

Exercice 1. (4 pts)

Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini comme suit :

$$A = \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$



Montrer que A possède une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Exo 1.

$$A = \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 + 0 < \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2$$

$A \neq \emptyset$ majoré $\Rightarrow \sup A$ existe

$A \neq \emptyset$ minoré $\Rightarrow \inf A$ existe

$$2 = \sin \frac{1\pi}{2} + \frac{1}{1} \in A \text{ et } 2 \text{ majorant de } A \Rightarrow \boxed{\sup A = 2}$$

Montrons que $\inf A = -1$.

$$A = \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}, n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}, n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}, n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \underbrace{\left\{ \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N}^* \right\}}_{A_1} \cup \underbrace{\left\{ 1 + \frac{1}{4k+1}, k \in \mathbb{N} \right\}}_{A_2} \cup \underbrace{\left\{ -1 + \frac{1}{4k+3}, k \in \mathbb{N} \right\}}_{A_3}$$

1) $\inf A_1 = 0$. En effet, on utilise pour cela la caractéristique de la borne inférieure.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2k_\varepsilon} < \varepsilon$.

$$\frac{1}{2k_\varepsilon} < \varepsilon \Leftrightarrow k_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$$

On choisit $k_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}^*$. D'où $\inf A_1 = 0$.

$$2) \inf A_2 = 1 + \inf \left\{ \frac{1}{4k}, k \in \mathbb{N} \right\} = 1 + 0 = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Par caract.} \\ \text{borne inf.} \end{array} \right\}$$

$$3) \inf A_3 = -1 + \inf \left\{ \frac{1}{4k+3}, k \in \mathbb{N} \right\} = -1 + 0 = -1$$

Il s'ensuit $\inf A = \min \left\{ \inf A_1, \inf A_2, \inf A_3 \right\} = \boxed{-1}$.

Centre Universitaire de Mila
Institut des Science et de la Technologie
Domaine: MI (1^{er} année)
Analyse I

Année universitaire 2012/2013
Semestre I
Durée 1h30
17/01/2013

Examen

Exercice 1: (07 pts)

1) Soient A et B deux sous ensembles de $\mathbb{R}$ tel que $B \subset A$. Montrer que:

i) A borné $\Rightarrow B$ borné.

ii) $\sup(A) \geq \sup(B)$.

ANALYSE I

Corrigé de l'examen N° 1

Exercice 1: (07pts)

$A, B \subset \mathbb{R}$, et $B \subset A$.

1) Montre que:

i) A borné $\Rightarrow B$ borné

B borné $\Leftrightarrow \exists M, m \in \mathbb{R} \forall x \in B, m \leq x \leq M$.

on a:

A borné $\Leftrightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x \leq M$
et on a:

$B \subset A$ donc $\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall x \in B, m \leq x \leq M$
Alors B borné

ii) $\sup(A) \geq \sup(B)$

on a: A et B borné donc $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent

soit $x \in B$ $x \in A$ mais A majorée alors

$x \leq \sup(A)$ Alors:

$\sup(A)$ est un majorant de B .

et on a: B majorée c'est-à-dire $\sup(B)$ et le plus petit majorant de B , Alors

$\sup(B) \leq \sup(A)$.

2) f continue sur $[a, b]$, $\alpha, B \in \mathbb{R}_+^*$

=====

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2016/2017.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Epreuve de contrôle.
Jeudi 17/11/2016 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1: (06pts) On définit le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ par :

$$A = \left\{ \frac{k}{|k-2|+1} \quad / \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. Montrez que $A \subset [-2, 2]$.
2. Montrez que $\sup A$ et $\inf A$ existent. Déterminez-les ensuite.

Exercice 1: (06 pts) $A = \left\{ \frac{k}{|k-2|+1} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

1^{er}/ Montrer que $A \subset [-2, 2]$:

1^{ère} méthode: Posons $x = \frac{k}{|k-2|+1}$, il suffit de montrer que $|x| \leq 2$.
 On a: $|x| = \frac{|k|}{|k-2|+1}$ et $|k| = |k-2+2| \leq |k-2|+2$
 donc $|x| \leq \frac{|k-2|+2}{|k-2|+1} \Rightarrow |x| \leq 1 + \frac{1}{|k-2|+1}$
 D'autre part $|k-2|+1 \geq 1$ car $|k-2| \geq 0$; donc $\frac{1}{|k-2|+1} \leq 1$
 Il en résulte enfin $|x| \leq 1+1 \Rightarrow |x| \leq 2$

2^{ème} méthode: On a $|k-2| = \begin{cases} k-2 & \text{si } k \geq 2 \\ 2-k & \text{si } k \leq 1 \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$ rappelez-le)
 donc $x = \begin{cases} \frac{k}{k-1} & \text{si } k \geq 2 \\ \frac{k}{3-k} & \text{si } k \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k-1} & \text{si } k \geq 2 \\ -1 + \frac{3}{3-k} & \text{si } k \leq 1 \end{cases}$
 * On a si $k \geq 2 \Rightarrow k-1 \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{k-1} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \frac{1}{k-1} \leq 2$
 * Aussi si $k \leq 1 \Rightarrow -k \geq -1 \Rightarrow 3-k \geq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{3-k} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \leq -1 + \frac{3}{3-k} \leq \frac{1}{2}$
 En définitive $\forall k \in \mathbb{Z} \quad -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow A \subset [-2, 2]$.

2^o/ Sup A et inf A existent: * $A \neq \emptyset$, il suffit de prendre une valeur de k .
 * Comme $A \subset [-2, 2]$, alors A est majorée par 2 (par exemple!)
 donc Sup A existe, d'après l'axiome de la borne sup; de plus
 A est minorée par -2 (par exemple), donc inf A existe, toujours
 selon le même axiome.

Détermination de $\sup A$ et $\inf A$:

* Il est facile de voir que pour $k=2$, on a $x=2$. Donc $2 \in A$.
C'est-à-dire 2 est en même temps élément de A et majorant; donc

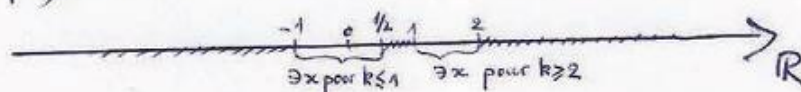
$$\boxed{\sup A = 2 = \max A}$$

* D'après les deux expressions de x pour $k \geq 2$ et $k \leq 1$, on remarque que $\forall x \in A$, $x \geq -1$. Donc -1 est minorant de A .

(Une remarque heuristique consiste à dire que pour k tendant vers $-\infty$, $\frac{3}{3-k}$ devient petit positif et donc $-1 + \frac{3}{3-k}$ s'approche de -1 par valeurs supérieures à -1 ; ceci nous suggère que -1 sera $\inf A$). Montrons que $-1 = \inf A$. Pour cela

on applique la caractérisation de $\inf A$ par "les ε ".

$$(-1 = \inf A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A \text{ tel que } -1 \leq x_\varepsilon < -1 + \varepsilon \text{ (P)?}$$



a/ Si $\varepsilon > 3/2$ (trop grand), alors (P) est vérifiée avec par exemple $x_\varepsilon = 1/2$ calculé pour $k=1$. ($-1 \leq 1/2 < -1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 3/2$).

b/ Si $\varepsilon \leq 3/2$, alors aucun des x pour $k \geq 2$ ne peut vérifier $-1 \leq x < -1 + \varepsilon$ car ils sont tous ≥ 1 . Il faut chercher donc des x_ε dans la catégorie $k \leq 1$, c-à-d $x = \frac{k}{3-k} = -1 + \frac{3}{3-k} < -1 + \varepsilon$

$$\text{donc } \frac{3}{3-k} < \varepsilon \Rightarrow 3-k > 3/\varepsilon \Rightarrow 1-k > \frac{3}{\varepsilon} - 2$$

Remarquons que $\frac{3}{\varepsilon} - 2 \geq 0$ car $\frac{3}{\varepsilon} - 2 = \frac{2}{\varepsilon} (\frac{3}{2} - \varepsilon) \geq 0$.

Ainsi il y a tous les x pour lesquels $k \in \mathbb{Z}$ et $1-k \geq N(\varepsilon)$

où $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} - 2 \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}$.

$$\text{Donc } \boxed{\inf A = -1}$$

2

Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2017/2018.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Epreuve de contrôle.
Jeudi 16/11/2017 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1: (07pts) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$(E) \quad |x^2 - 1| + |x + 2| = |x - 3|.$$

Exercice 1: (07pts) (E): $|x^2-1| + |x+2| = |x-3|$

On a: $|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x^2-1 \geq 0 \\ -x^2+1 & \text{si } x^2-1 < 0 \end{cases}$; $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x+2 \geq 0 \\ -x-2 & \text{si } x+2 < 0 \end{cases}$
 et $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geq 0 \\ -x+3 & \text{si } x-3 < 0 \end{cases}$

Recapitulons tout dans le tableau suivant:

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$
$ x^2-1 $	x^2-1	x^2-1	$-x^2+1$	x^2-1	x^2-1	
$ x+2 $	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	$x+2$	$x+2$	
$ x-3 $	$-x+3$	$-x+3$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$	
(E)	$x^2-6=0$	$x^2+2x-2=0$	$x^2-2x=0$	$x^2+2x-2=0$	$x^2+4=0$	

Ainsi il y a 4 équations du second degré à résoudre dans les intervalles respectifs.

1^{ère} cas: $x \in]-\infty, -2]$; $x^2-6=0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$ or $+\sqrt{6} \notin]-\infty, -2]$
 mais $-\sqrt{6} < -2$ donc $S_1 = \{-\sqrt{6}\}$

2^{ème} cas: $x \in [-2, -1]$; $x^2+2x-2=0$, $\Delta' = 1+2=3$
 or $x \in [1, 3]$ $x_1 = -1-\sqrt{3}$, $x_2 = -1+\sqrt{3}$

Or: $x_2 > -1$ (évident) et $x_2 < 1$ car $\sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow -1+\sqrt{3} < 1$.
 $x_1 < -2$ car $-1-\sqrt{3} < -2 \Leftrightarrow -1-\sqrt{3} < -2$. Donc $S_2 = \emptyset$.

3^{ème} cas: $x \in [-1, 1]$; $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$
 or $2 \notin [-1, 1]$ et $0 \in [-1, 1]$ donc $S_3 = \{0\}$.

4^{ème} cas: $x \in [3, +\infty[$, $x^2+4=0$ n'a pas de solution, $S_4 = \emptyset$.

Σ définitive

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \{-\sqrt{6}, 0\}$

1

Examen de rattrapage –Analyse 1 –

Les livres et documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Chacune de vos réponses doit être justifiée et argumentée.

Exercice 1 (I) : 1pt + 1 pt ; II) : 2 Pts)

I) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 2x + 8 < 0$; **b)** $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12.$

II) Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Montrer que : $(|x - a| < |x - b|) \Leftrightarrow (x < \frac{a+b}{2})$

LMD.MI - Analyse 1 - Corrigé succinct - rattrapage Semestre 1 - 2015/2016

Exercice 1.

(I) (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 8 = (x-1)^2 + 7 > 0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 8 < 0\} = \emptyset$ (2 pr)

(b) on remarque que $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

Donc $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12\} =]3, 4[$ (1 pr)

(II) * Montrons d'abord $\left[x < \frac{a+b}{2}\right] \Rightarrow [|x-a| < |x-b|]$ $\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} = b\right)$

Soit $x < \frac{a+b}{2}$. ($\Leftrightarrow 2x < a+b \Leftrightarrow x-a < b-x$)

1^{er} cas : $a < x < \frac{a+b}{2} < b$

On a donc $|x-a| = x-a < b-x = |b-x|$. d'où l'implication

2^e cas : $x \leq a < \frac{a+b}{2} < b$

on a $0 \leq a-x < b-x \Rightarrow |a-x| < b-x$ d'où l'implication (1 pr)

* Inversement (montrons la contraposée, c'est à dire

$\left[x \geq \frac{a+b}{2}\right] \Rightarrow [|b-x| \leq |x-a|]$

Soit $x \geq \frac{a+b}{2}$. ($\Leftrightarrow 2x \geq a+b \Leftrightarrow x-a \geq b-x$)

1^{er} cas : $\frac{a+b}{2} \leq x < b$

$\Rightarrow 0 \leq b-x \leq x-a \Rightarrow |b-x| \leq |x-a|$ d'où le résultat

2^e cas : $a < \frac{a+b}{2} < b \leq x$

$\Rightarrow a+b \leq 2x \Rightarrow b-x \leq 0 \leq x-a$

Par ailleurs $a < b \Rightarrow -a > -b \Rightarrow x-a > -(b-x)$

Donc $x-a = |x-a| \geq |b-x|$ d'où le résultat (1 pr)

(nous remarquons que $\left[|x-a| < |b-x|\right] \Rightarrow \left[x < \frac{a+b}{2}\right]$.)

=====

Contrôle Continu -Analyse 1 -

Exercice 1 (4pts) :

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$:

a) $(x+2)^2 > 4$.

(1pt)

b) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$.

(1pt)

2) Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R} : [x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$; (où $[a]$ est la partie entière de $a \in \mathbb{R}$). (2pts)

- Corrigé succinct - Contrôle Continu - LMD-MI-

Exercice 1: (4pts)

1/ a) $(x+2)^2 > 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 - 2^2 > 0 \Leftrightarrow x(x+4) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ ou } x < -4$ (1pt)

b) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12 \Leftrightarrow |(x-3)(x-4)| > (x-3)(x-4)$
 $\Leftrightarrow 3 < x < 4$ (1pt)

2/ On sait que : $[x] \leq x < [x] + 1$ et $[y] \leq y < [y] + 1$
 d'où $[x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2$

Or $[x+y] \leq (x+y) < [x+y] + 1$

Ainsi d'une part on a : $[x] + [y] \leq [x+y]$ et d'autre part $[x+y] + 1 \leq [x] + [y] + 2$

Donc $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$ (2pts)

