

CHAPITRE 3 : ALGÈBRE DE BOOLE

The slide features a dark brown background. At the bottom, there are two horizontal bars: an orange bar on the left and a blue bar on the right, both of equal height and extending across the width of the slide.

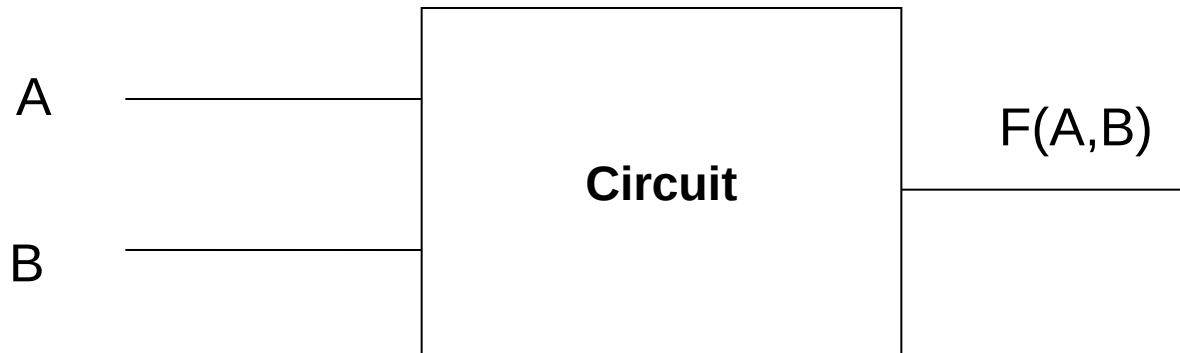
- Plan
- Introduction
- Algèbre de Boole
 - Les opérateurs logiques
 - Lois fondamentales de l'algèbre de Boole
- La fonction logique et la table de vérité
- Le logigramme

- Plan
- Introduction
- Algèbre de Boole
 - Les opérateurs logiques
 - Lois fondamentales de l'algèbre de Boole
- La fonction logique et la table de vérité
- Le logigramme

Introduction

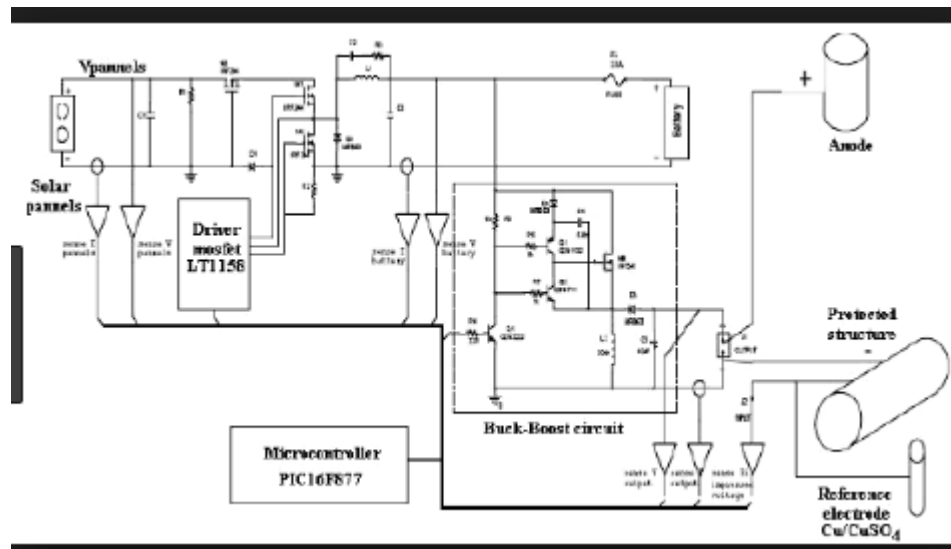
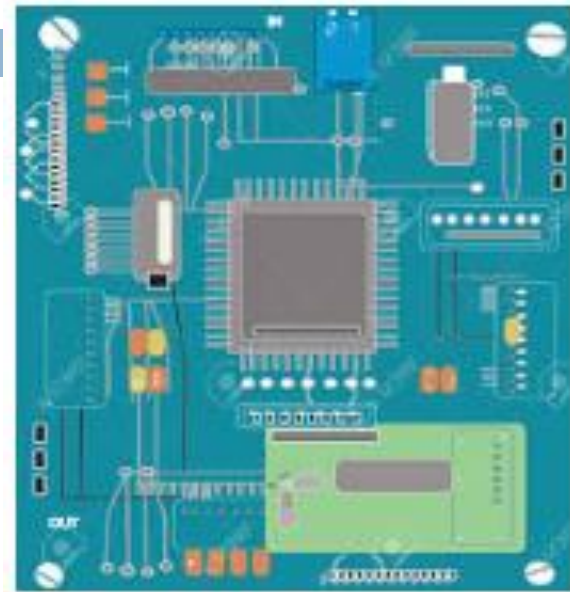
4

- Les machines numériques sont constituées d'un ensemble de **circuits** électroniques.
- Chaque circuit fournit une **fonction logique** bien déterminée (addition, comparaison ,....).



La fonction $F(A,B)$ peut être : la somme de A et B , ou le résultat de la comparaison de A et B ou une autre fonction

5



Introduction

6

Objectif de ce chapitre:

Nous cherchons dans ce cours à construire la fonction F selon le besoin de l'utilisateur:

Comment définir une fonction logique?

Introduction

7

- Pour **concevoir et réaliser** ce circuit on doit avoir un modèle **mathématique de la fonction** réalisée par ce circuit .
- Ce modèle doit prendre en considération le **système binaire**.
- Le modèle mathématique utilisé est celui de **Boole**.

- Plan
- Introduction
- Algèbre de Boole
 - Les opérateurs logiques
 - Lois fondamentales de l'algèbre de Boole
- La fonction logique et la table de vérité
- Le logigramme

Algèbre de Boole



- En 1847, George Boole invente une algèbre pour traiter les variables binaires.
- Il a défini 3 opérateurs de base, ainsi qu'un ensemble de règles.

- Plan
- Introduction
- Algèbre de Boole
 - Les opérateurs logiques
 - Lois fondamentales de l'algèbre de Boole
- La fonction logique et la table de vérité
- Le logigramme

Opérateur logique NON

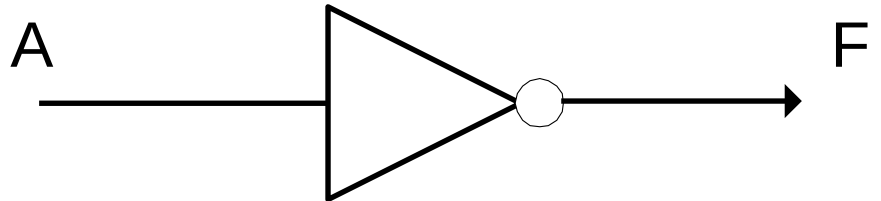
- En anglais: NOT

- Représentation:

- ▣ $F = \overline{A}$

Table de vérité

<i>Entrée</i>	<i>Sortie</i>
A	F
0	1
1	0



Symbole graphique

Opérateur logique ET

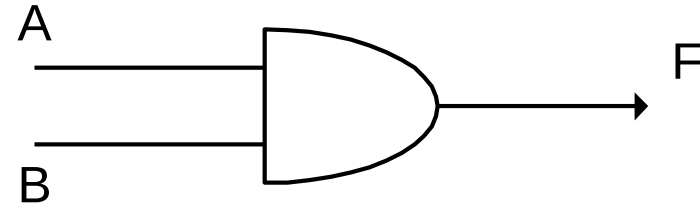
□ En anglais: AND

□ Représentation:

▣ $S = A * B$

Table de vérité

<i>Entrée</i>		<i>Sortie</i>
B	A	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Symbole graphique

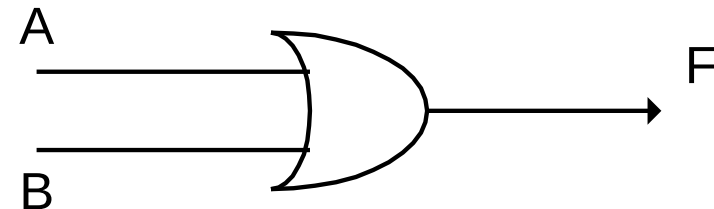
Opérateur logique OU

- En anglais: OR
- Représentation:

- ▣ $F = A + B$

Table de vérité

<i>Entrée</i>		<i>Sortie</i>
B	A	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Symbole graphique

Opérateur logique NON-ET

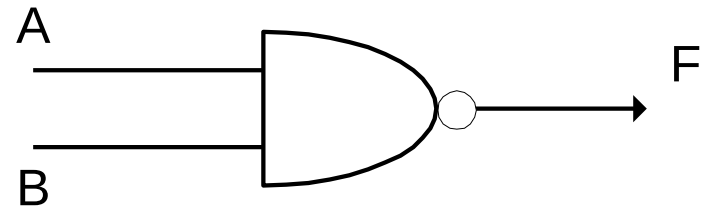
□ En anglais: NAND

□ Représentation:

□ $F = \overline{A * B}$

Table de vérité

<i>Entrée</i>		<i>Sortie</i>
B	A	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Symbole graphique

Opérateur logique NON-OU

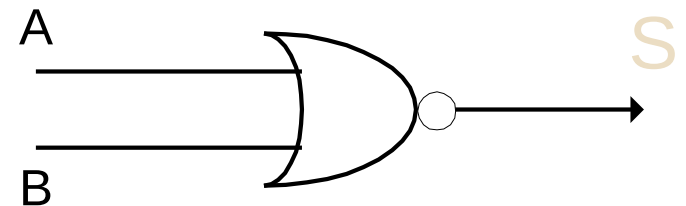
□ En anglais: NOR

□ Représentation:

▣ $F = \overline{A + B}$

Table de vérité

<i>Entrée</i>		<i>Sortie</i>
B	A	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Symbole graphique

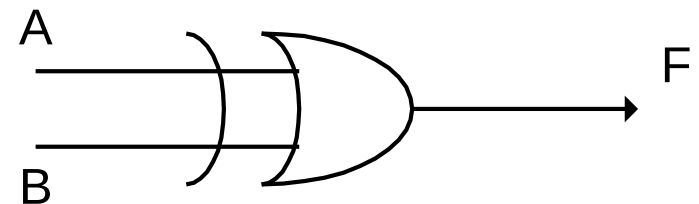
Opérateur OU-EXCLUSIF

□ En anglais: EXOR

□ Représentation: $F(A, B) = A \oplus B$
 $A \oplus B = A.\bar{B} + \bar{A}.B$

Table de vérité

<i>Entrée</i>		<i>Sortie</i>
B	A	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Symbole graphique

- Plan
- Introduction
- Algèbre de Boole
 - Les opérateurs logiques
 - Lois fondamentales de l'algèbre de Boole
- La fonction logique et la table de vérité
- Le logigramme

L'algèbre Booléenne

□ Fermeture:

- Si A et B sont des variables Booléennes, alors $A+B$, $A*B$ sont aussi des variables Booléennes.

□ Commutativité

- $A + B = B + A$

- $A * B = B * A$

L'algèbre Booléenne

□ Associativité

- $A + (B + C) = (A + B) + C$

- $A * (B * C) = (A * B) * C$

□ Distributivité

- ET/OU: $A * (B + C) = A * B + A * C$

- OU/ET: $A + (B * C) = (A + B) * (A + C)$

L'algèbre Booléenne

□ Idempotence

- $A + A = A$

- $A * A = A$

□ Complémentarité

- $A + \overline{A} = 1$

- $A * \overline{A} = 0$

□ Identités remarquables

- $1 + A = 1$ et $1 * A = A$

- $0 + A = A$ et $0 * A = 0$

L'algèbre Booléenne

21

Théorème de DE-MORGANE

$$\overline{A + B} = \overline{A} . \overline{B}$$

$$\overline{A . B} = \overline{A} + \overline{B}$$

L'algèbre Booléenne

22

Généralisation du Théorème DE-MORGANE à **N** variables

$$\overline{A.B.C.....} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} +$$

$$\overline{A + B + C +} = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.....$$

- Plan
- Introduction
- Algèbre de Boole
 - Les opérateurs logiques
 - Lois fondamentales de l'algèbre de Boole
- La fonction logique et la table de vérité
- Le logigramme

Les fonctions logiques

24

- C'est une fonction qui **relie N variables logiques** avec un ensemble **d'opérateurs logiques** de base.
- Si une fonction logique possède **N variables logiques** $\rightarrow$ **2^n combinaisons** $\rightarrow$ la fonction possède **2^n valeurs**.
- Les 2^n combinaisons sont représentées dans une table qui s'appelle **table de vérité (TV)**.

Exemples de fonctions logiques

25

$$F(A,B,C) = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A B \overline{C}$$

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.C$$



Passages:

De la forme logique vers la table de vérité

De la table de vérité vers la forme algébrique

La forme canonique



Passages:

De la forme logique vers la table de vérité

De la table de vérité vers la forme algébrique

La forme canonique

Fonction logique vers Table de vérité

28

$$F(A,B,C) = \overline{A} \overline{B} C + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} \overline{C} + A B C$$

$$F(0,0,0) = \overline{0} \overline{0} \overline{0} + \overline{0} \overline{0} 0 + 0 \overline{0} \overline{0} + 0 \overline{0} 0 = 0$$

$$F(0,0,1) = \overline{0} \overline{0} 1 + \overline{0} \overline{0} \overline{1} + 0 \overline{0} 1 + 0 \overline{0} \overline{1} = 1$$

$$F(0,1,0) = \overline{0} \overline{1} 0 + \overline{0} \overline{1} 1 + 0 \overline{1} 0 + 0 \overline{1} 1 = 0$$

$$F(0,1,1) = \overline{0} \overline{1} 1 + \overline{0} \overline{1} \overline{1} + 0 \overline{1} 1 + 0 \overline{1} \overline{1} = 1$$

$$F(1,0,0) = \overline{1} \overline{0} 0 + \overline{1} \overline{0} 1 + 1 \overline{0} 0 + 1 \overline{0} 1 = 0$$

$$F(1,0,1) = \overline{1} \overline{0} 1 + \overline{1} \overline{0} \overline{1} + 1 \overline{0} 1 + 1 \overline{0} \overline{1} = 1$$

$$F(1,1,0) = \overline{1} \overline{1} 0 + \overline{1} \overline{1} 1 + 1 \overline{1} 0 + 1 \overline{1} 1 = 0$$

$$F(1,1,1) = \overline{1} \overline{1} 1 + \overline{1} \overline{1} \overline{1} + 1 \overline{1} 1 + 1 \overline{1} \overline{1} = 1$$

La table de
vérité



A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		1

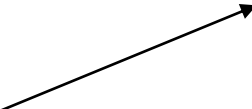
Fonction logique vers Table de vérité

29

$$F(A, B, C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.C$$

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		1

Une table de vérité





Passages:

De la forme logique vers la table de vérité

De la table de vérité vers la forme algébrique

La forme canonique

Table de vérité vers fonction logique

Entrées			Sortie
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + AB\bar{C}$$

Table de vérité vers fonction logique

A	B	C		S		
0	0	0		0	⇒	$A+B+C$ Maxterme
0	0	1		0	⇒	$A+B+\bar{C}$
0	1	0		0	⇒	$A+\bar{B}+C$
0	1	1		1	→	$\bar{A}.B.C$ Minterme
1	0	0		0	⇒	$\bar{A}+B+C$
1	0	1		1	→	$A.\bar{B}.C$
1	1	0		1	→	$A.B.\bar{C}$
1	1	1		1	→	$A.B.C$

Table de vérité vers fonction logique

33

- F = somme **mintermes**

$$F(A, B, C) = \overline{A} . B . C + A . \overline{B} . C + A . B . \overline{C} + A . B . C$$

- F = produit des **maxtermes**

$$F(A, B, C) = (A + B + C) (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C) (\overline{A} + B + C)$$



Passages:

De la forme logique vers la table de vérité

De la table de vérité vers la forme algébrique

La forme canonique

Forme canonique d'une fonction logique

35

- On appelle **forme canonique** d'une fonction la forme où chaque **terme** de la fonction comportent **toutes les variables**.

Exemple :

$$F(A, B, C) = AB\bar{C} + A\bar{C}B + \bar{A}BC$$

Il existent plusieurs formes canoniques : les plus utilisées sont la première et la deuxième forme .

Première forme canonique

36

- **Première forme canonique** (forme disjonctive) :
somme de produits

C'est la somme des mintermes.

- Une disjonction de conjonctions.

Exemple : Cette forme est la forme **la plus utilisée**.

$$F(A, B, C) = \bar{A} . B . C + A . \bar{B} . C + A . B . \bar{C} + A . B . C$$

Deuxième forme canonique

37

- **Deuxième forme canonique** (conjonctive): produit de sommes
- Le produit des maxtermes
- Conjonction de disjonctions
- Exemple :

$$F(A, B, C) = (A + B + C) (A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C) (\bar{A} + B + C)$$

La **première et la deuxième** forme canonique sont équivalentes .

Forme canonique d'une fonction logique

38

- On peut toujours **ramener n'importe** qu'elle fonction logique à l'une des **formes canoniques**.
- Cela revient à rajouter les variables manquants dans les termes qui ne **contiennent** pas toutes les variables (les termes non canoniques).

Example

39

$$1. F(A, B) = A + B$$

$$= A (B + \overline{B}) + B (A + \overline{A})$$

$$= AB + A\overline{B} + AB + \overline{A}B$$

$$= AB + A\overline{B} + \overline{A}B$$

$$2. F(A, B, C) = AB + C$$

$$= AB(C + \overline{C}) + C(A + \overline{A})$$

$$= ABC + AB\overline{C} + AC + \overline{A}C$$

$$= ABC + AB\overline{C} + AC(B + \overline{B}) + \overline{A}C(B + \overline{B})$$

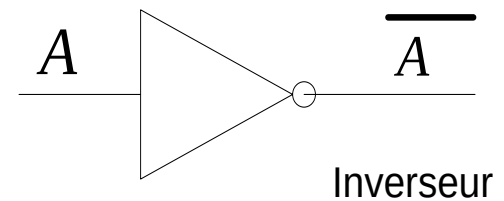
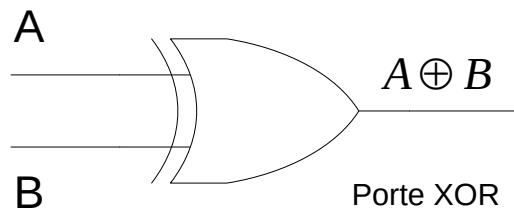
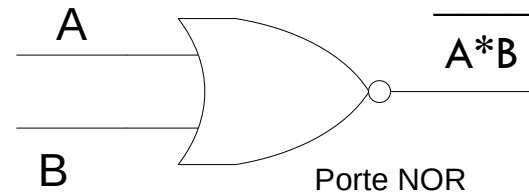
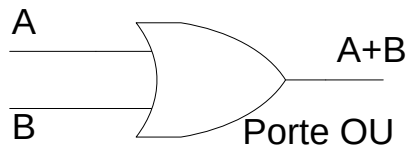
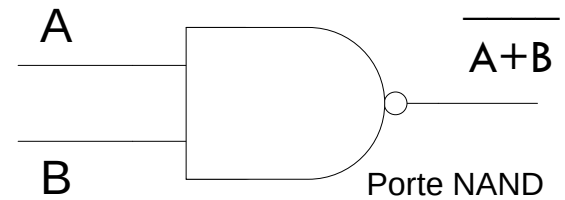
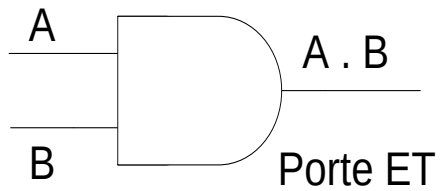
$$= ABC + AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C$$

$$= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A} B C + \overline{A} \overline{B} C$$

- Plan
- Introduction
- Algèbre de Boole
 - Les opérateurs logiques
 - Lois fondamentales de l'algèbre de Boole
- Les fonctions logiques
- Les portes logiques et le logigramme

Les portes logiques

41

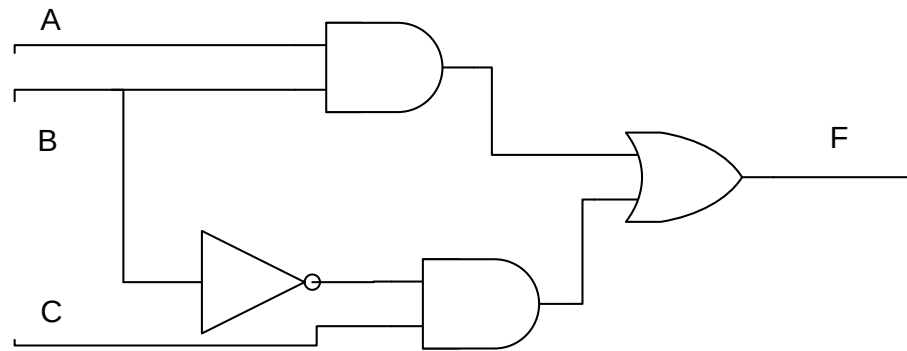


C'est la traduction de la fonction logique en un schéma électronique.

Le principe consiste à remplacer chaque **opérateur logique** par la **porte logique** qui lui correspond.

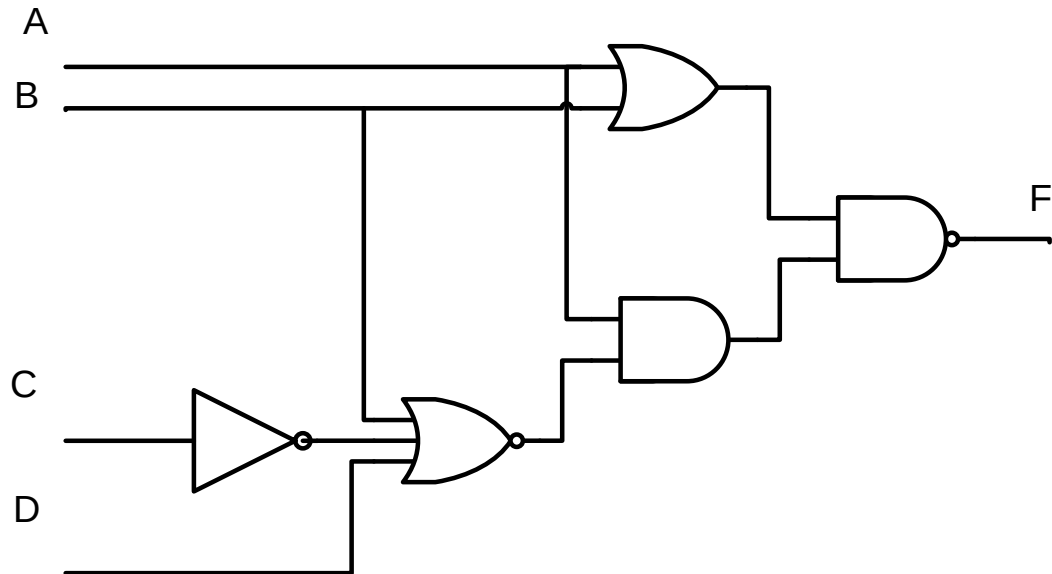
Exemple 1

$$F(A, B, C) = A.B + \overline{B}.C$$



Exemple 2

$$F(A, B, C, D) = \overline{(A + B) \cdot (B + \overline{C} + D)} \cdot A$$



Exercice 1

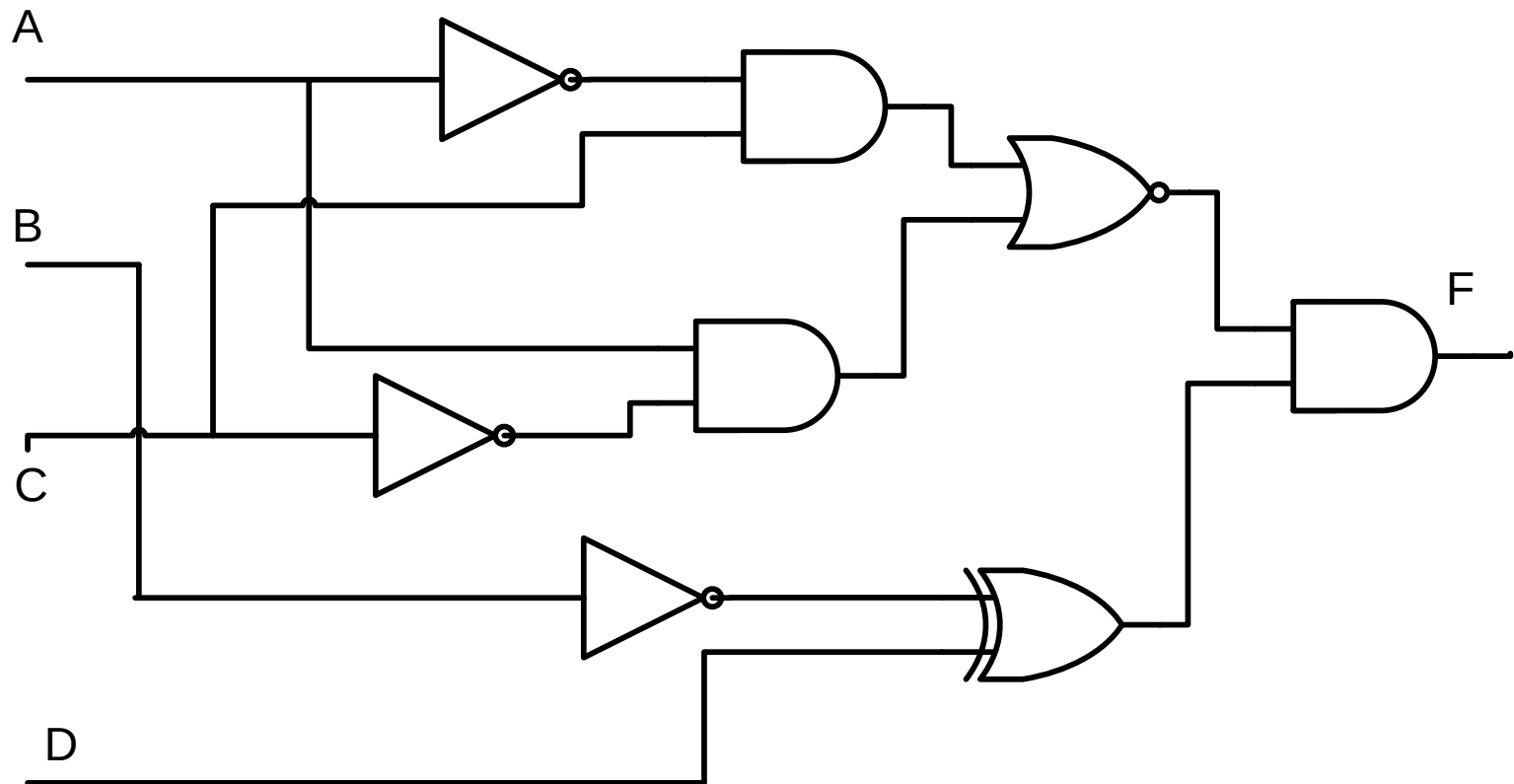
- Donner le logigramme des fonctions suivantes :

$$F(A, B) = \overline{A}.B + A.\overline{B}$$

$$F(A, B, C) = (A + B).(\overline{A} + C).(B + \overline{C})$$

$$F(A, B, C) = \overline{(A . B)} . (C + B) + A.\overline{B}.C$$

Exercice 2 : Donner l'équation de F ?



Chapitre 3 Suite

46

La simplifications des fonctions algébriques

Simplification des fonctions logiques

47

- Méthode Algébrique
- Méthode de Karnaugh

Simplification des fonctions logiques

48

- **Méthode Algébrique**
- Méthode de Karnaugh

Méthode algébrique

49

- Le principe consiste à appliquer les **règles** de l'algèbre de **Boole** afin d'éliminer des variables ou des termes.
- Mais il n'y a pas une **démarche bien spécifique**.

Voici quelques règles les plus utilisées :

□ Idempotence

- $A + A = A$
- $A * A = A$

□ Complémentarité

- $A + \overline{A} = 1$
- $A * \overline{A} = 0$

□ Identités remarquables

- $1 + A = 1$ et $1 * A = A$
- $0 + A = A$ et $0 * A = 0$

$$A B + \overline{A} B = B$$

$$A + A B = A$$

$$A + \overline{A} B = A + B$$

$$(A + B)(A + \overline{B}) = A$$

$$A(A + B) = A$$

$$A(\overline{A} + B) = AB$$

Méthode algébrique

50

□ Exemple

$$\begin{aligned} F(A, B, C) &= A B + \overline{B}C + AC = AB + \overline{B}C + AC (B + \overline{B}) \\ &= AB + \overline{B}C + ACB + A\overline{B}C \\ &= AB (1 + C) + \overline{B}C (1 + A) \\ &= AB + \overline{B}C \end{aligned}$$

Méthode algébrique

51

$$\begin{aligned} f &= ABC + A\bar{B}(\overline{\bar{A} \cdot \bar{C}}) = ABC + A\bar{B}(A + C) \\ &= ABC + A\bar{B} + A\bar{B}C \\ &= AC \underbrace{(B + \bar{B})}_{1} + A\bar{B} \\ &= AC + A\bar{B} = A(C + \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= A(\underbrace{\bar{B} + BC}_{\bar{B} + C}) + A\bar{B}C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A\bar{B} + AC + A\bar{B}C = A\bar{B} \underbrace{(1 + C)}_1 + AC = A(\bar{B} + C) \end{aligned}$$

Méthode algébrique

$$\begin{aligned} f &= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C = AB(\overbrace{C + \bar{C}}^1) + A\bar{B}C \\ &= AB + A\bar{B}C \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{B + C} = A(B + \bar{B}C) \\ &= A(B + C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= ABC + AB\bar{C} + ABC + A\bar{B}C \\ &= AB(C + \bar{C}) + AC(\underbrace{B + \bar{B}}_1) \\ &= AB + AC \\ &= A(B + C) \end{aligned}$$

Simplification des fonctions logiques

53

- Méthode Algébrique
- Méthode de Karnaugh

Description de la table de karnaugh

54

B \ A	0	1
0		
1		

Tableau à 2 variables

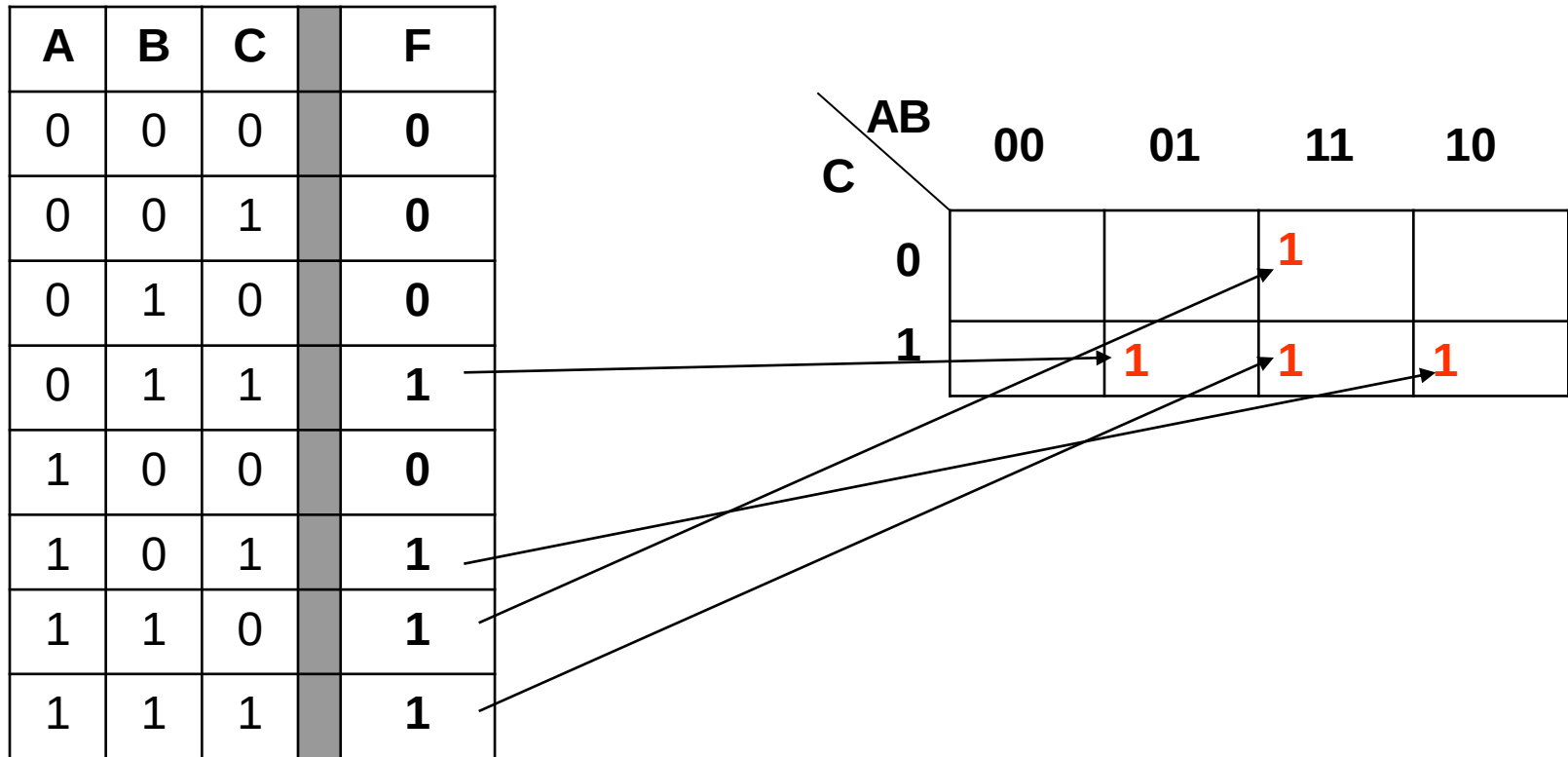
C \ AB	00	01	11	10
0				
1				

Tableau à 3 variables

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tableau à 4 variables

Passage de la table de vérité à la table de Karnaugh



Passage de la table de vérité à la table de Karnaugh

$$F1(A, B, C) = \sum (1, 2, 5, 7)$$

		AB			
		00	01	11	10
C	0	0	1	0	0
	1	1	0	1	1

Méthode de simplification. Exemple : 3 variables

57

□ Exercice 1

$$F_1 = \bar{a} . b . \bar{c} + \bar{a} . b . c$$

		$a \quad b$			
		00	01	11	10
F_1 c	0	0	1	0	0
	1	0	1	0	0

$$F_1 = \bar{a} . b$$

□ Exercice 2

$$F_2 = \bar{a} . \bar{b} . \bar{c} + \bar{a} . \bar{b} . c + a . b . \bar{c} + a . b . c$$

		$a \quad b$			
		00	01	11	10
F_2 c	0	1	0	1	0
	1	1	0	1	0

$$F_2 = \bar{a} . \bar{b} + a . b$$

Méthode de simplification. Exemple : 3 variables

□ **Exercice 3**

$$F_3 = a \cdot b \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c$$

		$a \quad b$			
		00	01	11	10
c	0	0	0	1	1
	1	0	0	1	1

$$F_3 = a$$

□ **Exercice 4**

$$F_4 = a \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c + a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c$$

		$a \quad b$			
		00	01	11	10
c	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	1

$$F_4 = a \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot c$$

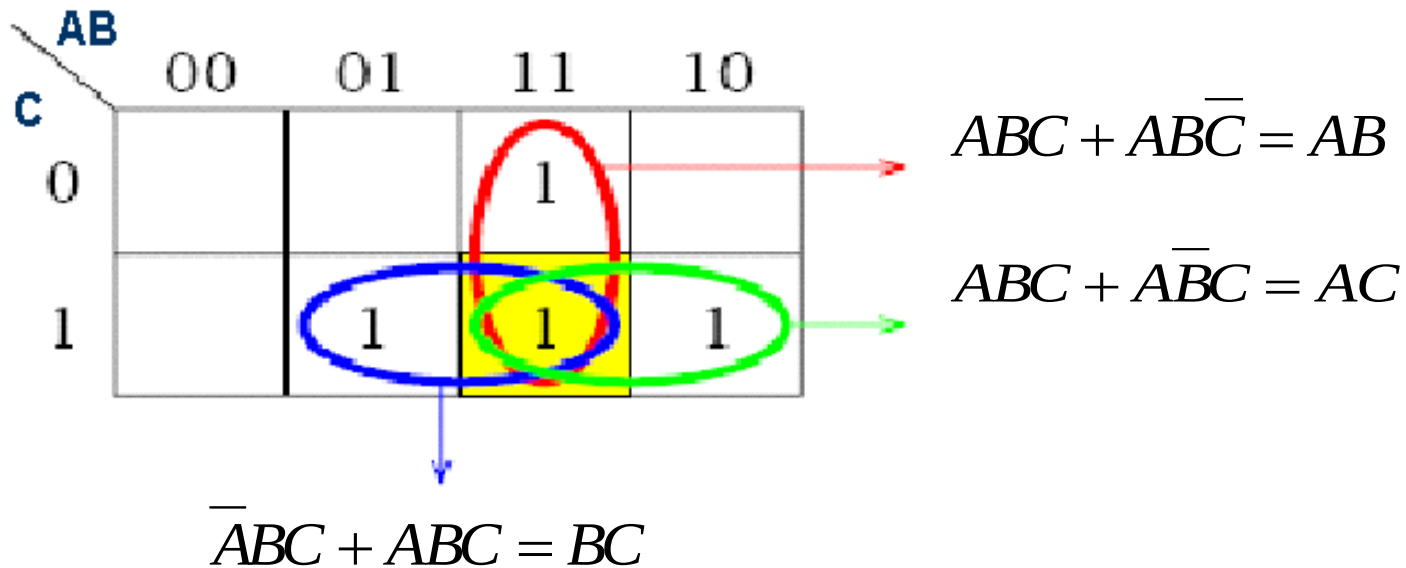
Méthode de simplification. Exemple : 3 variables

F_6

		a b			
		00	01	11	10
c	00	1	0	0	1
	01	0	1	1	0
	11	0	1	0	0
	10	1	0	0	1

$$F_6 = \bar{b} \cdot \bar{d} + b \cdot \bar{c} \cdot d + \bar{a} \cdot b \cdot d$$
$$F_6 = \bar{b} \cdot \bar{d} + b \cdot d (\bar{a} + \bar{c})$$

Méthode de simplification. Exemple : 3 variables



$$F(A, B, C) = AB + AC + BC$$

Méthode de simplification. Exemple : 4 variables

2 - Regrouper

		c.d			
		00	01	11	10
a.b	00				
	01				
	11	1	1	1	1
	10			1	1

$$S = a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c + a.b.d$$

Méthode de simplification. Exemple : 4 variables

3 – Définir l'équation finale

		c.d			
		00	01	11	10
a.b	00				
	01				
	11	1	1	1	1
	10			1	1

$$S = a.\bar{b}.c + a.b.\bar{c} + a.b.c + a.b.d$$

$$S = a.b + a.c$$

$$S = a.(b + c)$$

Méthode de simplification. Exemple : 4 variables

63

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	1			1
	01		1	1	1
	11				1
	10	1			1

$$F(A, B, C, D) = \overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{D} + \overline{B}CD$$

Exercice

Trouver la forme simplifiée des fonctions à partir des deux tableaux ?

ab		00	01	11	10
c	0		1	1	1
	1	1		1	1

ab		00	01	11	10
cd	00	1		1	1
	01				
	11				
	10	1	1	1	1

Cas d'une fonction non totalement définie

65

- Pour les cas impossibles ou interdites Il faut mettre un **X** dans la T.V .

		ab			
		00	01	11	10
cd	00			1	
	01		1	x	x
	11	1	1	x	x
	10		1	1	1

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	X
1	0	1	0	1
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	X
1	1	1	0	1
1	1	1	1	X

Cas d'une fonction non totalement définie

66

- Il est possible d'utiliser les **X** dans des regroupements :
 - ▣ Soit les prendre comme étant des **1**
 - ▣ Ou les prendre comme étant des **0**

ab \ cd		00	01	11	10
00				1	
01			1	x	x
11		1	1	x	x
10			1	1	1

$$AB + CD + AC + BC + BD$$