Bornes supérieures et inférieures

Exercice 1 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$
$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$
2. En déduire que
$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$
Admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Pour chacun des exercices suivants, déterminer s'il y a une borne inférieure, une borne supérieure, si oui, les déterminer.

$$A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}; \qquad B = \left\{ \frac{1}{1 - 2^{-n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
$$C = \left\{ \frac{x^3}{|x^3 - 1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[\right\}; \qquad D = \left\{ \frac{x^n}{|x^n - 1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Soit
$$X = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q}; p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que X est majoré et minoré.
2. En déduire que X possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soit
$$X = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. Montrer que X admet un plus grand élément et le déterminer.
3. Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soit
$$X = \left\{ \frac{x+1}{x+2}; x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \right\}$$
Montrer que X admet une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soit

$$X=\left\{\frac{2xy}{x^2+y^2}, x\in\mathbb{R}^*, y\in\mathbb{R}^*\right\}$$

1. Montrer que X admet une borne inférieure et la déterminer, est-ce un minimum ?
2. Montrer que X admet une borne supérieure et la déterminer, est-ce un maximum ?

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Soit

$$X=\left\{\frac{2p}{2pq+3}; p,q\in\mathbb{N}^*\right\}$$

1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. En déduire que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

On considère la partie $X=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}; n\in\mathbb{N}^*\right\}$

Démontrer que X possède une borne inférieure et une borne supérieure, déterminer chacune d'entre elle.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Soient

$$X=\left\{\frac{(-1)^p}{p}+\frac{2}{p}; p\in\mathbb{N}^*\right\} \quad \text{et} \quad Y=\left\{\frac{(-1)^p}{p}+\frac{2}{q}; p\in\mathbb{N}^*; q\in\mathbb{N}^*\right\}$$

1. Montrer que X possède dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure, une borne inférieure et les déterminer.
2. Montrer que Y possède dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure, une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soient $A\subset\mathbb{R}$ et $B=\{y=-x; x\in A\}$

1. Montrer que B est minoré si et seulement si A est majoré.
2. En supposant que A est majoré, démontrer que B admet une borne inférieure et que
$$\inf(B)=-\sup(A)$$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

On rappelle que si I est un intervalle ouvert, quel que soit $x\in I$, il existe $\epsilon>0$ tel que :

$$]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset I$$

Plus généralement, un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall x\in A, \exists\epsilon>0,]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset A$$

est dit « ouvert ».

Soit I un intervalle ouvert. On veut démontrer qu'il n'existe pas de sous-ensemble ouverts non vides A et B de $\mathbb{R}$ tels que $I=A\cup B$ et $A\cap B=\emptyset$ (autrement dit tels que $\{A,B\}$ soit une partition de I). Pour cela on va supposer que de tels ensemble A et B existent pour aboutir à une contradiction. On considère pour cela $a\in A$ et $b\in B$ et l'ensemble

$$E=\{t\in[0,1]; a+t(b-a)\in A\}$$

1. Montrer que E admet une borne supérieure, que l'on appellera T. (On ne demande pas de trouver T).
2. Montrer (en utilisant le fait que A est ouvert) que $a+T(b-a)\notin A$.

3. En déduire (en utilisant le fait que I est un intervalle) que $a+T(b-a)\in B$.
4. Montrer (en utilisant le fait que B est ouvert) que ceci contredit le fait que T soit la borne supérieure de E.

Allez à : Correction exercice 11 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. m et n étant strictement positifs on a $0<\frac{mn}{(m+n)^2}$
$$\frac{1}{4}-\frac{mn}{(m+n)^2}=\frac{(m+n)^2-4mn}{(m+n)^2}=\frac{m^2+2mn+n^2-4mn}{(m+n)^2}=\frac{m^2-2mn+n^2}{(m+n)^2}=\frac{(m-n)^2}{(m+n)^2}\geq 0$$
Donc
$$\frac{mn}{(m+n)^2}\leq\frac{1}{4}$$
2. $\frac{mn}{(m+n)^2}$ est borné donc A admet une borne inférieure a telle que $0\leq a$ (car a est le plus grand des minorants) et une borne supérieure b telle que $b\leq\frac{1}{4}$ (car b le le plus petit des majorants).
Comme pour tout $m>0$ et $n>0$, $a\leq\frac{mn}{(m+n)^2}$, en prenant $m=1$ on a :
$$a\leq\frac{n}{(1+n)^2}\to 0$$
Ce qui implique que $a\leq 0$, on a donc $a=0$.
Comme pour tout $m>0$ et $n>0$, $\frac{mn}{(m+n)^2}\leq b$, en prenant $m=n$ on a :
$$\frac{n^2}{(n+n)^2}\leq b$$
Puis
$$\frac{n^2}{(n+n)^2}=\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$$
Montre que $\frac{1}{4}\leq b$ et finalement $b=\frac{1}{4}$.

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

On pose $u_n=\frac{2^n}{2^n-1}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeur strictement positive
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}}{\frac{2^n}{2^n-1}}=2\times\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}=\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}<1$$
Donc cette suite est strictement décroissante, on en déduit que
$$\sup(A)=u_1=\frac{2}{2-1}=2\qquad\text{et}\qquad\inf(A)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=1$$
Remarque : A admet un maximum 2 mais pas de minimum.
$\frac{1}{1-2^{-n}}=\frac{2^n}{2^n-1}$, par conséquent $A=B$ ces deux ensembles ont les mêmes bornes supérieures et inférieures.
$$\lim_{\substack{x\to1\\x\neq1}}\frac{x^3}{|x^3-1|}=+\infty$$
Donc C n'admet pas de borne supérieure.
Il est évident que pour tout $x\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, $\frac{x^3}{|x^3-1|}\geq 0$ donc 0 est un minorant de C par conséquent
$$0\leq\inf(C)$$
Puis remarquons que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x^3}{|x^3-1|}=0$$

Donc

$$\inf(C)\leq 0$$

En conclusion

$$\inf(C)=0$$

Remarque : 0 n'est pas un minimum.

Remarque : on aurait pu étudier la fonction

$$\begin{aligned}]0,1[\cup]1,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^3}{|x^3-1|} \end{aligned}$$

En faisant attention à distinguer les cas $x\in]0,1[$ (où $x^3-1<0$) et $x\in]1,+\infty[$ (où $x^3-1>0$).

Pour l'ensemble D on fait strictement le même raisonnement que pour l'ensemble C. D n'a pas de borne supérieure et sa borne inférieure est 0.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1. Comme $p\geq 1$ et $q\geq 1$, $0<\frac{1}{p}\leq 1$ et $0<\frac{1}{q}\leq 1$, on a donc
$$0<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leq 1+1=2$$
Ce qui montre bien que X est majoré et minoré.
2. Pour $p=q=1$, on a
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2$$
Donc 2 est le maximum, par conséquent sa borne supérieure.
0 est un minorant de X donc $0\leq \inf(X)$
Et
$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=0$$
Donc $\inf(X)\leq 0$ et finalement $\inf(X)=0$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1. La première idée serait de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n=\frac{(-1)^n+2}{n}$ est croissante ou décroissante mais cela ne marche pas, vérifions le tout de même
$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{(-1)^{n+1}+2}{n+1}-\frac{(-1)^n+2}{n}=\frac{((-1)^{n+1}+2)n-((-1)^n+2)(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n((-1)^{n+1}+2-(-1)^n-2)-((-1)^n+2)}{n(n+1)}=\frac{2(-1)^{n+1}n-(-1)^n-2}{n(n+1)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)-2}{n(n+1)} \end{aligned}$$
Selon la parité de n cette expression est positive ou négative, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone, il faut faire autrement.
Pour voir ce qu'il se passe on va calculer les premiers termes de cette suite
$$u_1=1;\ \ u_2=\frac{3}{2};\ \ u_3=\frac{1}{3};\ \ u_4=\frac{3}{4}; u_5=\frac{1}{5}; u_6=\frac{1}{2}$$
Cela donne l'idée d'étudier les deux sous-suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$v_n = u_{2n} = \frac{3}{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

Ces deux suites sont manifestement positive, décroissante et tende vers 0, on en conclut que

$$0 < u_n < \max(v_1, w_0) = \frac{3}{2}$$

2. D'après l'étude précédente $\frac{3}{2} = u_2$ est le plus grand élément (le maximum)
3. $\frac{3}{2}$ est un maximum et donc la borne supérieure.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Donc $\inf(X) \leq 0$,

Et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, 0 est un minorant donc on a $\inf(X) \geq 0$ et finalement

$$\inf(X) = 0$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

Nous allons étudier la fonction

$$f:]-\infty, -3] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$$

f est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, -3]$ (le seul problème de f est $x = -2$ qui est en dehors de l'intervalle d'étude)

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - (x+1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$$

f est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$, sa borne inférieure est

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$$

Et sa borne supérieure (qui est aussi un maximum) est

$$m = f(-3) = 2$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,

$$(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 + y^2) \leq 2xy \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

On peut diviser car x (et y est non nul).

Ce qui signifie que X est une partie de $\mathbb{R}$ minorée et évidemment non vide, donc X admet une borne inférieure.

(1) montre que -1 est un minorant de X, la borne inférieure étant le plus petit des majorants donc

$$\inf(X) \geq -1$$

Si on pose $y = -x$

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

Cela montre que

$$\inf(X) \leq 1$$

Par conséquent

$$\inf(X) = -1$$

Il s'agit d'un minimum car cette borne inférieure est dans X.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2xy}{x^2+y^2} \quad (2)$$

Ce qui signifie que X est une partie de $\mathbb{R}$ majorée et évidemment non vide, donc X admet une borne supérieure.

(2) montre que 1 est un majorant de X, la borne supérieure étant le plus petit des majorants donc

$$\sup(X) \leq 1$$

Si on pose $y = x$

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

Cela montre que

$$\sup(X) \geq 1$$

Par conséquent

$$\sup(X) = 1$$

Il s'agit d'un maximum car cette borne supérieure est dans X.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1.

$$\frac{2p}{2pq+3} < \frac{2p}{2pq} = \frac{1}{q} \leq 1$$

Donc X est majoré.

$$\frac{2p}{2pq+3} > 0$$

Donc X est minoré.

2. Fixons $q = 1$ et faisons tendre p vers l'infini.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2p}{2pq+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2p}{2p+3} = 1$$

Donc

$$\sup(X) \geq 1$$

D'autre part

$$\frac{2p}{2pq+3} < 1$$

Donc $\sup(X) \leq 1$ et finalement $\sup(X) = 1$.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

Manifestement la suite de terme général $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ est ni croissante ni décroissante, elle est même de signe alterné. Nous allons considérer les deux sous-suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définies par

$$v_n = u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \qquad et \qquad w_n = u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$$

$$\forall n \geq 1, v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{2(n+1)} - \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{2n-2(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

$$v_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$$

$$\forall n \geq 1, w_{n+1} - w_n = -1 + \frac{1}{2(n+1)+1} - \left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2n+1-(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$
$$= \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$
$$w_0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} w_n = -1$$
$$X = \left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathbb{m}\right\}$$
$$\sup(X) = \max\left(sup\left(\left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right), sup\left(\left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathbb{m}\right\}\right)\right) = \max\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2}$$

Remarque : $\sup(X) = \max(X)$
$$\inf(X) = \min\left(\inf\left(\left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right), \inf\left(\left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathbb{m}\right\}\right)\right) = \min(1, -1) = -1$$

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

1. On pose pour tout $p \geq 1$:
$$u_p = \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{p}$$
Cette suite est ni croissante ni décroissante (à vérifier)
On pose
$$\forall p \geq 1, v_p = u_{2p} = \frac{1}{2p} + \frac{2}{2p} = \frac{3}{2p} \quad \text{et} \quad \forall p \geq 0, w_p = u_{2p+1} = -\frac{1}{2p+1} + \frac{2}{2p+1} = \frac{1}{2p+1}$$
Les suites $(v_p)_{p \geq 1}$ et $(w_p)_{p \geq 0}$ sont décroissantes, c'est évident.
$$v_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{p \to +\infty} v_p = 0$$
$$w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{p \to +\infty} w_p = 0$$
$$\sup(X) = \max(v_p;\ p \geq 1, w_p; p \geq 0) = \max\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{3}{2}$$
Remarque cette borne supérieure est un maximum.
$$\inf(X) = \min(v_p;\ p \geq 1, w_p; p \geq 0) = \min(0; 0) = 0$$
Remarque : cette borne inférieure n'est pas un minimum.

2.
$$\sup(Y) = \sup\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) + \sup\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$$
En distinguant p pair et p impair, on voit que :
$$\sup\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$
Comme la suite de terme général de terme général $\frac{2}{q}$ est décroissante donc
$$\sup\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = 2$$
On en déduit que
$$\sup(Y) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$
Remarque : cette borne supérieure est un maximum.
$$\inf(Y) = \inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) + \inf\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$$
En allant un peu vite et en distinguant p pair et p impair

$$\inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p};p\in\mathbb{N}^*\right\}\right)=\frac{(-1)^1}{1}=-1$$

Comme la suite de terme général de terme général $\frac{2}{q}$ est décroissant et tend vers 0 donc

$$\inf\left(\left\{\frac{2}{q};q\in\mathbb{N}^*\right\}\right)=0$$

$$\inf(Y)=\inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p};p\in\mathbb{N}^*\right\}\right)+\inf\left(\left\{\frac{2}{q};q\in\mathbb{N}^*\right\}\right)=-1+0=-1$$

Remarque : cette borne inférieure n'est pas un minimum.

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1. Si B est minoré alors il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $y\in B$, $m\le y$ alors il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $y\in B$, $-y\le -m$, comme tous les éléments de A sont de la forme $-y$, $y\in B$, cela montre qu'il existe $-m\in\mathbb{R}$ tel que pour tous $x\in A$, $x\le -m$, autrement dit A est majoré.
   Réciproque :
   Si A est majoré, il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tous $x\in A$, $x\le M$ alors il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tous $x\in A$, $-M\le -x$, comme tous les éléments de B sont de la forme $-x$, $x\in A$, il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tous $y\in B$, $-M\le y$, autrement dit B est minoré.
2. Si A est majoré, A admet une borne supérieure $\sup(A)$ et d'après le 1. B est minoré et donc admet une borne inférieure $\inf(B)$.
   Pour tout M un majorant de A : $\sup(A)\le M$
   D'après 1. $-M$ est un minorant de B : $-M\le\inf(B)$
   On en déduit que pour tout M, majorant de A : $-\inf(B)\le M$, cela entraine que
   $$-\inf(B)\le\sup(A)$$
   De même pour m un minorant de B : $m\le\inf(B)$
   D'après 1. $-m$ est un majorant de A : $\sup(A)\le -m$
   On en déduit que pour tout m, minorant de B : $\sup(A)\le -m$, cela entraine que
   $$\sup(A)\le -\inf(B)$$
   Donc
   $$\sup(A)=-\inf(B)\Leftrightarrow\inf(B)=-\sup(A)$$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. $E\subset[0,1]$, ce qui signifie que E est une partie de $\mathbb{R}$ bornée par 1 et non vide car $a=0\times(b-a)\in E$ donc E admet une borne supérieure.
2. Si $a+T(b-a)\in A$ alors il existe $\epsilon>0$ tel que
   $$]a+T(b-a)-\epsilon,a+T(b-a)+\epsilon[\in A$$
   Car A est un ouvert.
   Ce qui entraine que
   $$a+T(b-a)+\frac{\epsilon}{2}\in A$$
   Or
   $$a+T(b-a)+\frac{\epsilon}{2}=a+T(b-a)+\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=a+\left(T+\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)$$
   Donc
   $$a+\left(T+\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)\in A$$
   Et par définition de E :

$$T+\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\in E$$

Ce qui n'est pas possible car

$$T<T+\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}$$

Et T est supposer être la borne supérieure de E.

Par conséquent $a+T(b-a)\notin A$.

3. $T\in[0,1]$ donc

$$0\le T(b-a)\le b-a$$

Ce qui entraine que

$$a\le a+T(b-a)\le b$$

$a+T(b-a)\in[a,b]$ comme I est un intervalle $a+T(b-a)\in I$, de plus D'après 2.

$a+T(b-a)\notin A$ donc $a+T(b-a)\in B$ puisque $A\cup B=I$.

4. Comme B est ouvert et que $a+T(b-a)\in B$ il existe ϵ tel que

$$]a+T(b-a)-\epsilon,a+T(b-a)+\epsilon[\in B$$

Ce qui entraine que

$$a+T(b-a)-\frac{\epsilon}{2}\in B$$

Or

$$a+T(b-a)-\frac{\epsilon}{2}=a+T(b-a)-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=a+\left(T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)$$

Donc

$$a+\left(T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)\in B$$

Ce qui entraine que

$$a+\left(T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)\notin A$$

Comme $T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}<T\le 1$, $T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\in[0,1]$ (quitte à diminuer ϵ pour que $T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}$ reste positif) et par définition de E :

$$T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\notin E$$

Ce qui n'est pas possible car

$$T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}<T$$

Comme pour tout $\epsilon'>0$, $T-\epsilon'\in E$, en prenant

$$\epsilon'=\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}$$

Il y a une contradiction. Elle se situe dans l'implication

$$a+\left(T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)\in B\Rightarrow a+\left(T-\frac{1}{2}\times\frac{\epsilon}{b-a}\right)(b-a)\notin A$$

C'est-à-dire dans le fait que $A\cap B=\emptyset$

Allez à : Exercice 11 :