

Nombres réels

Exercice 1 :

Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$$

Allez à : [Correction exercice 1](#) :

Exercice 2 :

Montrer que pour tous réels a et b strictement positifs

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

Allez à : [Correction exercice 2](#) :

Exercice 3 :

Déterminer les ensembles suivants, mettre ces ensemble sous la forme d'un intervalle de \mathbb{R} ou une réunion d'intervalles.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 1\} \\ A_2 &= \{x \in \mathbb{R}, x^3 \leq 1\} \\ A_3 &= \left\{x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{2x}{x^2 + 1} < 1\right\} \\ A_4 &= \left\{x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1\right\} \\ A_5 &= \left\{x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{1}{x^2 - 1} < 1\right\} \end{aligned}$$

Allez à : [Correction exercice 3](#) :

Exercice 4 :

Trouver tous les réels x tels que $|x - 1| + |x - 2| = 2$

Allez à : [Correction exercice 4](#) :

Exercice 5 :

Résoudre l'équation

$$\sqrt{41-x} + \sqrt{41+x} = 10$$

Indication :

Malgré les apparences il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de 41^2

Allez à : [Correction exercice 5](#) :

Exercice 6 :

1. Résoudre

$$|u - 1| + |u + 1| = 4$$

2. En déduire les solutions de

$$|\sqrt{x+1} - 1| + |\sqrt{x+1} + 1| = 4$$

3. Puis les solutions de

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} = 4$$

Allez à : [Correction exercice 6](#) :

Exercice 7 :

Démontrer que $\sqrt[3]{3 + 2\sqrt{6}}$ est un nombre irrationnel.

Allez à : [Correction exercice 7](#) :

Exercice 8 :

Montrer que $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ est un nombre entier.

Allez à : [Correction exercice 8](#) :

Exercice 9 :

Soit

$$\alpha = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

Montrer que $\alpha \in \sqrt{3}\mathbb{N}$ (C'est-à-dire de la forme $\sqrt{3}$ multiplié par un entier naturel).

Allez à : [Correction exercice 9](#) :

Exercice 10 :

$$\text{Soit } \alpha = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

Calculer α .

Allez à : [Correction exercice 10](#) :

Exercice 11 :

On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est-à-dire que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

1. Montrer que $\alpha = 6 + 4\sqrt{2}$ et $\beta = 6 - 4\sqrt{2}$ sont irrationnels.
2. Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$.
3. Montrer que $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ est rationnel.

Allez à : [Correction exercice 11](#) :

Exercice 12 :

On suppose que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels. Montrer que

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
2. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}$
3. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$
4. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 \notin \mathbb{Q}$. On rappelle que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Allez à : [Correction exercice 12](#) :

Exercice 13 :

Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Allez à : [Correction exercice 13](#) :

Exercice 14 :

Soient a et b deux réels. On appelle $\alpha = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

Montrer que α est une racine d'une équation du troisième degré à coefficients réels

Allez à : [Correction exercice 14](#) :

Exercice 15 :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = 0$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, E(x) + E(-x) = -1$

Allez à : [Correction exercice 15](#) :

Exercice 16 :

1. Montrer que pour tout réels x et y on a :

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$$

2. Montrer que pour tout entier relatif on a :

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$$

On pourra distinguer les cas $m+n$ pair et $m+n$ impairs.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$E\left((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\right) = 4n + 1$$

On pourra montrer que $E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right) = 2n$

Allez à : [Correction exercice 16](#) :

Exercice 17 :

Montrer que pour tout x et y réels on a :

$$E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(2x) + E(2y)$$

On pourra distinguer les cas

$(E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2}$ ou $E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1)$ et $(E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2}$ ou $E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1)$.

Ce qui fait 4 cas (n'est-ce pas ?).

Allez à : [Correction exercice 17](#) :

Exercice 18 :

Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx) \quad (*)$$

Où $E(y)$ est la partie entière du réel y .

1. Montrer qu'il existe un unique $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que

$$x + \frac{p}{n} < E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n}$$

On pourra appuyer son raisonnement en traçant la droite réelle et en plaçant

$$E(x), x, x + \frac{k}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, E(x) + 1 \text{ et } x + \frac{p+1}{n}$$

2. En déduire que

$$nE(x) + n - p - 1 \leq nx < nE(x) + n - p$$

Et $E(nx)$ en fonction de n , $E(x)$ et p .

3. Calculer $E\left(x + \frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$ et calculer $E\left(x + \frac{k}{n}\right)$ pour tout $k \in \{p+1, \dots, n-1\}$.

4. En coupant la somme $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right)$ en 2, montrer l'égalité (*).

Allez à : [Correction exercice 18](#) :

Exercice 19 :

Soient p et q deux nombres réels non nuls et n un entier strictement positif.

Montrer que le polynôme $P(x) = x^n + px + q$ ne peut avoir plus que deux racines réelles si n est pair et plus que trois racines si n est impairs.

Allez à : **Correction exercice 19 :**

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

$$(\sqrt{2}\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Ces deux expressions ($\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{2}\sqrt{a+b}$) sont positives donc

$$(\sqrt{2}\sqrt{a+b})^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Allez à : **Exercice 1 :**

Correction exercice 2 :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} &\Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow 0 \leq a - 2\sqrt{ab} + b \Leftrightarrow 0 \\ &\leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie donc la première aussi.

Allez à : **Exercice 2 :**

Correction exercice 3 :

$$\begin{aligned} A_1 &=]-1,1[\\ A_2 &=]-\infty, 1] \\ 1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 &= \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

On pouvait aussi étudier la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} A_3 &=]-\infty, -1[\cup]-1,1[\cup]1, +\infty[\\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1 &\Leftrightarrow |x| < 1 \\ A_4 &=]-1,0[\cup]0,1[\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

$$1 - \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 = \frac{(x^2-1)^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1 - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-2)}{(x^2-1)^2} > 0$$

Comme $x^2 - 2$ est positif si et seulement si $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

Donc

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$$

Par conséquent

$$A_5 =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$$

Allez à : **Exercice 3 :**

Correction exercice 4 :

On pose $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$

Pour $x \leq 1$, $x - 1 \leq 0$ et $x - 2 \leq -1 < 0$ donc

$$f(x) = -(x - 1) - (x - 2) = -2x + 3$$

Pour $1 \leq x \leq 2$, $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \leq 0$ donc

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2| = x - 1 - (x - 2) = 1$$

Pour $x \geq 2$, $x - 1 \geq 1 > 0$ et $x - 2 \geq 0$ donc

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2| = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$$

Puis on va résoudre $f(x) = 2$ sur chacun des trois intervalles.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3 = 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} \leq 1$ donc $\frac{1}{2}$ est solution.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution dans cet intervalle.

$$\begin{cases} f(x) = 2 \\ 2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 2 \\ 2 \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ 2 \leq x \end{cases}$$

$2 \leq \frac{5}{2}$ donc $\frac{5}{2}$ est solution.

Les réels qui vérifient $|x - 1| + |x - 2| = 2$ sont $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

Allez à : **Exercice 4 :**

Correction exercice 5 :

Les éventuelles solutions vérifient $41 - x \geq 0$ et $41 + x \geq 0$, autrement dit $-41 \leq x \leq 41$, ce sera bien le cas des deux solutions trouvées.

Comme ces deux expressions sont positives on a

$$\begin{aligned} \sqrt{41 - x} + \sqrt{41 + x} = 10 &\Leftrightarrow (\sqrt{41 - x} + \sqrt{41 + x})^2 = 100 \Leftrightarrow 41 - x + 2\sqrt{41 - x}\sqrt{41 + x} + 41 + x = 100 \\ &\Leftrightarrow 82 + 2\sqrt{41^2 - x^2} = 100 \Leftrightarrow 2\sqrt{41^2 - x^2} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{41^2 - x^2} = 9 \Leftrightarrow 41^2 - x^2 = 9^2 \\ &\Leftrightarrow 41^2 - 9^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = (41 - 9)(41 + 9) \Leftrightarrow x^2 = 32 \times 50 = 16 \times 100 = (4 \times 10)^2 \Leftrightarrow x \\ &= \pm 40 \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 5 :**

Correction exercice 6 :

1. On pose $f(u) = |u - 1| + |u + 1|$

Si $u < -1$, $u - 1 < 0$ et $u + 1 < 0$ alors $f(u) = -(u - 1) - (u + 1) = -2u$

$$\forall u < -1, f(u) = 4 \Leftrightarrow -2u = 4 \Leftrightarrow u = -2$$

Si $-1 \leq u \leq 1$, $u - 1 < 0$ et $u + 1 > 0$ alors $f(u) = -(u - 1) + (u + 1) = 2$

$f(u) = 4$ n'a pas de solution

Si $u > 1$, $u - 1 > 0$ et $u + 1 > 0$ alors $f(u) = (u - 1) + (u + 1) = 2u$

$$\forall u > 1, f(u) = 4 \Leftrightarrow 2u = 4 \Leftrightarrow u = 2$$

Il y a deux solutions -2 et 2 .

2. D'après la première question il faut et il suffit de résoudre

$$\sqrt{x+1} = -2 \quad \text{et} \quad \sqrt{x+1} = 2$$

$\sqrt{x+1} = -2$ n'a pas de solution réelle et $\sqrt{x+1} = 2$ équivaut à $x+1 = 4$, c'est-à-dire à $x = 3$.

3.

$$x+2-2\sqrt{x+1} = x+1-2\sqrt{x+1}+1 = (\sqrt{x+1}-1)^2$$

Et

$$x+2+2\sqrt{x+1} = x+1+2\sqrt{x+1}+1 = (\sqrt{x+1}+1)^2$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} = 4 &\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} = 4 \\ &\Leftrightarrow |\sqrt{x+1}-1| + |\sqrt{x+1}+1| = 4 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 6 :**

Correction exercice 7 :

Supposons que $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ soit un nombre rationnel, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, on peut supposer qu'ils sont positifs tous les deux tels que

$$\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}} = \frac{p}{q}$$

On élève au cube

$$3+2\sqrt{6} = \frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow 3+2\sqrt{6} = \frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow \sqrt{6} = \frac{1}{2} \left(\frac{p^3}{q^3} - 3 \right)$$

Ce qui signifie que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ et $q_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{6} = \frac{p_1}{q_1}$$

On peut supposer que p_1 et q_1 ne sont pas tous les deux pairs sinon on peut simplifier par 2.

$$\sqrt{6} = \frac{p_1}{q_1} \Leftrightarrow 6q_1^2 = p_1^2 \quad (1)$$

Si p_1 est impair, son carré est aussi impair ce qui est impossible d'après (1) donc p_1 est pair et donc q_1 est impair, il existe p_2 tel que $p_1 = 2p_2$ et q_2 tel que $q_1 = 2q_2 + 1$, ce que l'on remplace dans (1)

$$6(2q_2+1)^2 = 4p_2^2 \Leftrightarrow 3(4q_2^2+4q_2+1) = 2p_2^2 \Leftrightarrow 3 = 2p_2^2 - 12q_2^2 - 12q_2$$

Ce qui est impossible, donc $\sqrt[3]{3+2\sqrt{6}}$ n'est pas un nombre rationnel.

Allez à : **Exercice 7 :**

Correction exercice 8 :

$$\begin{aligned} a^2 &= \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} \right)^2 = 7+4\sqrt{3} + 2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{7-4\sqrt{3}} + 7-4\sqrt{3} \\ &= 14 + 2\sqrt{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = 14 + 2\sqrt{7^2 - 4^2 \times 3} = 14 + 2\sqrt{49-48} \\ &= 14 + 2 \times 1 = 16 \end{aligned}$$

Les deux valeurs possibles de a sont $a = -4$ et $a = 4$, comme $a > 0$, on a

$$a = 4 \in \mathbb{Z}$$

Allez à : **Exercice 8 :**

Correction exercice 9 :

$$\alpha^2 = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + 4 + 2\sqrt{3} = 8 + 2\sqrt{4^2 - 2^2 \times 3} = 8 + 2\sqrt{4} = 12$$

Donc $\alpha = 2\sqrt{3}$ car $\alpha > 0$ et $2 \in \mathbb{N}$

Allez à : **Exercice 9** :

Correction exercice 10 :

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \left(\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \right)^2 = 4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + 4 + 2\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{4^2 - 2^2 \times 3} \\ &= 8 - 2\sqrt{4} = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

Donc $\alpha = \pm 2$ or $4 - 2\sqrt{3} < 4 + 2\sqrt{3}$ entraine que $\alpha = -2$

Allez à : **Exercice 10** :

Correction exercice 11 :

1. Si α est rationnel alors

$$\sqrt{2} = \frac{\alpha - 6}{4}$$

Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.

Si β est rationnel alors

$$\sqrt{2} = \frac{\beta - 6}{-4}$$

Est rationnel, ce qui est faux d'après le cours.

Donc α et β sont irrationnel.

2.

$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{(6 + 4\sqrt{2})(6 - 4\sqrt{2})} = \sqrt{6^2 - 4^2 \times 2} = \sqrt{36 - 32} = \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$$

3.

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 6 + 4\sqrt{2} + 4 + 6 - 4\sqrt{2} = 16$$

Comme $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0$, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 4 \in \mathbb{Q}$.

Allez à : **Exercice 11** :

Correction exercice 12 :

1. Si $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

Ce qui entraine que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{3}$$

Puis on élève au carré

$$2 = \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q}\sqrt{3} + 3$$

On isole $\sqrt{3}$

$$\sqrt{3} = -\frac{q}{2p} \left(-\frac{p^2}{q^2} - 1 \right)$$

Ce qui montre que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction, par conséquent

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

Je rappelle que le raisonnement suivant est faux

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

2. Si $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \frac{p}{q}$$

On élève au carré

$$2 + 2\sqrt{6} + 3 = \frac{p^2}{q^2}$$

On isole $\sqrt{6}$

$$\sqrt{6} = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{p^2}{q^2} \right)$$

Ce qui montre que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il y a une contradiction donc

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \notin \mathbb{Q}$$

3. Si $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = \frac{p}{q}$$

Ce qui entraîne que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q} - \sqrt{6}$$

Puis on élève au carré

$$2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{q}\sqrt{6} + 6$$

Ce qui équivaut à

$$5 + 2\sqrt{6} + \frac{2p}{q}\sqrt{6} = 6 + \frac{p^2}{q^2}$$

Soit encore

$$\sqrt{6} = \frac{1 + \frac{p^2}{q^2}}{2 + \frac{2p}{q}}$$

Ce qui montre que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, il y a donc une contradiction par conséquent

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$$

4. Si $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

On développe le carré avec la formule $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$3^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 6 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 2 \times 3\sqrt{2}\sqrt{6} + 2 \times 2\sqrt{3}\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}$$

Puis

$$36 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{12} + 4\sqrt{18} = \frac{p^2}{q^2}$$

En simplifiant et en arrangeant les choses

$$12\sqrt{6} + 6\sqrt{2^2 \times 3} + 4\sqrt{3^2 \times 2} = \frac{p^2}{q^2} - 36$$

$$12\sqrt{6} + 12\sqrt{3} + 12\sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{q^2} - 36 \right)$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{24} \left(\frac{p^2}{q^2} - 36 \right)$$

Ce qui entraîne que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux d'après la question 3. Il y a une contradiction donc

$$(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 \notin \mathbb{Q}$$

Allez à : **Exercice 12 :**

Correction exercice 13 :

Supposons qu'il existe p et q des entiers naturels, non tous les deux pairs tels que

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

En élevant au carré on obtient

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow 3q^2 = p^2 \quad (*)$$

Si p est pair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p = 2k$ et $q = 2l + 1$, ce que l'on remplace dans (*)

$$3(4l^2 + 4l + 1) = 4k^2 \Leftrightarrow 2(6l^2 + 6l + 1) + 1 = 2 \times 2k^2$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.

Si p est impair et q est pair, alors il existe k et l des entiers tels que $p = 2k + 1$ et $q = 2l$, ce que l'on remplace dans (*)

$$3 \times 4l^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow 2 \times 6l^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Le terme de gauche est pair et celui de droite est impair, ce n'est pas possible.

Si p est impair et q est impair, alors il existe k et l des entiers tels que $p = 2k + 1$ et $q = 2l + 1$, ce que l'on remplace dans (*)

$$3 \times (4l^2 + 4l + 1) = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow 2(6l^2 + 6l + 1) + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Leftrightarrow 2(6l^2 + 6l + 1) = 2(2k^2 + 2k) \Leftrightarrow 6l^2 + 6l + 1 = 2k^2 + 2k \Leftrightarrow 2(3l^2 + 3l) + 1 = 2(k^2 + k)$$

Le terme de gauche est impair et celui de droite est pair, ce n'est pas possible.

Donc $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Allez à : **Exercice 13 :**

Correction exercice 14 :

$$\alpha^3 = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 = a + 3(\sqrt[3]{a})^2\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{b})^2 + b = a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = a + b + 3\sqrt[3]{aba}$$

Donc α vérifie

$$\alpha^3 - 3\sqrt[3]{ab}\alpha - a - b = 0$$

Donc α est solution de

$$X^3 - 3\sqrt[3]{ab}X - a - b = 0$$

Allez à : **Exercice 14 :**

Correction exercice 15 :

1. Pour tous les entiers relatifs $E(x) = x$ et donc $E(-x) = -x$, donc $E(x) + E(-x) = 0$
2. Pour tous réels

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Si x n'est pas un entier, l'inégalité de gauche est stricte

$$E(x) < x < E(x) + 1$$

On multiplie cette inégalité par -1

$$-E(x) - 1 < -x < -E(x)$$

Cela montre que

$$E(-x) = -E(x) - 1$$

Par conséquent

$$E(x) + E(-x) = -1$$

Allez à : **Exercice 15** :

Correction exercice 16 :

1. On a

$$\begin{cases} E(x) \leq x < E(x) + 1 \\ E(y) \leq y < E(y) + 1 \end{cases}$$

En faisant la somme

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2 \quad (*)$$

Donc

$$E(x + y) = E(x) + E(y) \quad \text{ou} \quad E(x + y) = E(x) + E(y) + 1$$

Car ce sont les deux seuls entiers dans l'intervalle

$$[E(x) + E(y), E(x) + E(y) + 2[$$

C'est bien ce que l'on voulait montrer.

Si dans (*) on prend la partie entière, on obtient

$$E(E(x) + E(y)) \leq E(x + y) \leq E(E(x) + E(y) + 2)$$

On est obligé de changer le « $<$ » en « \leq » dans la seconde égalité, à moins de préciser que $E(x) + E(y) + 2$ est un entier et alors l'inégalité reste stricte.

Puis comme $E(x) + E(y)$ et $E(x) + E(y) + 2$ sont des entiers

$$E(E(x) + E(y)) = E(x) + E(y) \quad \text{et} \quad E(E(x) + E(y) + 2) = E(x) + E(y) + 2$$

Et on obtient

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 2$$

Ce qui n'est exactement ce que l'on demandait.

Beaucoup d'entre vous semble croire que

$$E(E(x) + E(y) + 2) = E(E(x)) + E(E(y)) + E(2) = E(x) + E(y) + 2$$

C'est correct uniquement parce que $E(x)$, $E(y)$ et 2 sont des entiers, mais il est faux de penser que pour tout x et y , $E(x + y) = E(x) + E(y)$ (enfin ce n'est pas toujours vrai).

2. Si $m + n$ est pair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m + n = 2p$ alors

$$\begin{aligned} E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) &= E\left(\frac{2p}{2}\right) + E\left(\frac{2p-m-m+1}{2}\right) = E(p) + E\left(\frac{2p-2m+1}{2}\right) \\ &= p + E\left(p - m + \frac{1}{2}\right) = p + p - m = 2p - m = n \end{aligned}$$

Si $m + n$ est impair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m + n = 2p + 1$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) &= E\left(\frac{2p+1}{2}\right) + E\left(\frac{2p+1-m-m+1}{2}\right) \\ &= E\left(p + \frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{2p-2m+2}{2}\right) = p + E(p - m + 1) = p + p - m + 1 \\ &= 2p - m + 1 = n \end{aligned}$$

Dans tous les cas on a

$$E\left(\frac{m+n}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$$

3.

$$\begin{aligned} E\left((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\right) &= E(n + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + n + 1) = E\left(2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}\right) \\ &= 2n + 1 + E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right) \\ \left(2\sqrt{n(n+1)}\right)^2 &= 4n(n+1) = 4n^2 + 4n \end{aligned}$$

Or

$$4n^2 \leq 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1$$

Ce qui équivaut à

$$2n \leq 2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1$$

Par conséquent

$$E\left(2\sqrt{n(n+1)}\right) = 2n$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$E\left((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\right) = 4n + 1$$

Allez à : **Exercice 16 :**

Correction exercice 17 :

- Premier cas :

$$E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2} \quad (*) \quad \text{et} \quad E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2} \quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 1$$

On en déduit que

$$E(x + y) = E(x) + E(y)$$

On multiplie (*) et (**) par 2.

$$2E(x) \leq 2x < 2E(x) + 1 \Rightarrow E(2x) = 2E(x)$$

$$2E(y) \leq 2y < 2E(y) + 1 \Rightarrow E(2y) = 2E(y)$$

Donc

$$\begin{aligned} E(x) + E(y) + E(x + y) &= E(x) + E(y) + E(x) + E(y) = 2E(x) + 2E(y) = E(2x) + E(2y) \\ &\leq E(2x) + E(2y) \end{aligned}$$

- Deuxième cas :

$$E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1 \quad (*) \quad \text{et} \quad E(y) \leq y < E(y) + \frac{1}{2} \quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + \frac{1}{2} \leq x + y < E(x) + E(y) + \frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie (*) et (**) par 2.

$$2E(x) + 1 \leq 2x < 2E(x) + 2 \Rightarrow E(2x) = 2E(x) + 1$$

$$2E(y) \leq 2y < 2E(y) + 1 \Rightarrow E(2y) = 2E(y)$$

Donc

$$\begin{aligned} E(x) + E(y) + E(x + y) &\leq E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 1 + 2E(y) = E(2x) + E(2y) \\ &\leq E(2x) + E(2y) \end{aligned}$$

- Troisième cas :

$$E(x) \leq x < E(x) + \frac{1}{2} \quad (*) \quad \text{et} \quad E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1 \quad (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + \frac{1}{2} \leq x + y < E(x) + E(y) + \frac{3}{2}$$

On en déduit que

$$E(x) + E(y) \leq E(x + y) = E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie (*) et (**) par 2.

$$\begin{aligned} 2E(x) &\leq 2x < 2E(x) + 1 \Rightarrow E(2x) = 2E(x) \\ 2E(y) + 1 &\leq 2y < 2E(y) + 2 \Rightarrow E(2y) = 2E(y) + 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(x) + E(y) + E(x + y) &\leq E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 2E(y) + 1 = E(2x) + E(2y) \\ &\leq E(2x) + E(2y) \end{aligned}$$

• quatrième cas :

$$E(x) + \frac{1}{2} \leq x < E(x) + 1 (*) \quad \text{et} \quad E(y) + \frac{1}{2} \leq y < E(y) + 1 (**)$$

En faisant la somme de ces inégalités

$$E(x) + E(y) + 1 \leq x + y < E(x) + E(y) + 2$$

On en déduit que

$$E(x + y) = E(x) + E(y) + 1$$

On multiplie (*) et (**) par 2.

$$\begin{aligned} 2E(x) + 1 &\leq 2x \leq 2E(x) + 2 \Rightarrow E(2x) = 2E(x) + 1 \\ 2E(y) + 1 &\leq 2y \leq 2E(y) + 2 \Rightarrow E(2y) = 2E(y) + 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(x) + E(y) + E(x + y) &= E(x) + E(y) + E(x) + E(y) + 1 = 2E(x) + 2E(y) + 1 \leq 2E(x) + 1 + E(y) + 1 \\ &= E(2x) + E(2y) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 17 :**

Correction exercice 18 :

1. Les ensembles $I_k = \left]x + \frac{k}{n}, x + \frac{k+1}{n}\right]$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ sont disjoints deux à deux et la réunion de ces intervalles est $]x, x + 1]$, comme $E(x) + 1 \in]x, x + 1]$ et que ces ensembles sont disjoints, $E(x) + 1$ appartient à un et un seul de ces ensembles, donc il existe un unique $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que

$$x + \frac{p}{n} < E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n} \quad (**)$$

Remarque : l'ensemble des intervalle I_k , $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ forme une partition de $]x, x + 1]$.

2. En prenant l'inégalité de droite dans (**), on a les équivalences suivantes :

$$x + \frac{p}{n} < E(x) + 1 \Leftrightarrow nx + p < nE(x) + n \Leftrightarrow nx < nE(x) + n - p$$

En prenant l'inégalité de gauche dans (**), on a les équivalences suivantes :

$$E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n} \Leftrightarrow nE(x) + n \leq nx + p + 1 \Leftrightarrow nE(x) + n - p - 1 \leq nx$$

En réunissant ces deux inégalités on trouve l'encadrement demandé par l'énoncé.

Comme

$$nE(x) + n - p - 1 \leq nx < nE(x) + n - p \Leftrightarrow nE(x) + n - p - 1 \leq nx < nE(x) + n - p - 1 + 1$$

On a

$$E(nx) = nE(x) + n - p - 1$$

3. Pour tout $k \in \{0, \dots, p\}$,

$$E(x) \leq x + \frac{k}{n} \leq x + \frac{p}{n} < E(x) + 1$$

Donc $E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(x)$

Pour tout $k \in \{p + 1, \dots, n - 1\}$,

$$E(x) + 1 \leq x + \frac{p+1}{n} \leq x + \frac{k}{n} \leq x + \frac{n-1}{n} = x + 1 - \frac{1}{n} < x + 1 < E(x) + 1 + 1 = E(x) + 2$$

Donc

$$E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(x) + 1$$

4.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^p E\left(x + \frac{k}{n}\right) + \sum_{k=p+1}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^p E(x) + \sum_{k=p+1}^{n-1} (E(x) + 1) \\ &= (p+1)E(x) + (n-1-p)(E(x) + 1) \\ &= (p+1)E(x) + n(E(x) + 1) - (1+p)E(x) - 1 - p = nE(x) + n - 1 - p = E(nx) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 18 :**

Correction exercice 19 :

Si n est pair, il existe $m \geq 1$ tel que $n = 2m$

$$P'(x) = 2mx^{2m-1} + p \quad \text{et} \quad P''(x) = 2m(2m-1)x^{2m-2}$$

Comme $2m - 2$ est pair pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P''(x) > 0$ donc P' est croissante sur \mathbb{R} .

Comme $2m - 1$ est impair

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2mx^{2m-1} + p) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2mx^{2m-1} + p) = +\infty$$

P' est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P'(\alpha) = 0$ et tel que

$$x < \alpha \Rightarrow P'(x) < 0 \quad \text{et} \quad x > \alpha \Rightarrow P'(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^{2m} + px + q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{2m} + px + q) = +\infty$$

Le tableau de variation de P est

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P'(x)$		- 0 +	
$P(x)$	$+\infty$	$P(\alpha)$	$+\infty$

Si $P(\alpha) > 0$ alors P n'a pas de solution.

Si $P(\alpha) = 0$ alors P n'a qu'une solution : α .

Si $P(\alpha) < 0$ alors P a deux solutions.

Si n est pair, il existe $m \geq 0$ tel que $n = 2m + 1$

$$P'(x) = (2m+1)x^{2m} + p \quad \text{et} \quad P''(x) = (2m+1)2mx^{2m-1}$$

Comme $2m - 1$ est impair :

Si $x < 0$ alors $P''(x) < 0$ et $x > 0$ alors $P''(x) > 0$. De plus $P'(0) = p$. Comme $2m$ est pair les limites de P' en $\pm\infty$ sont $+\infty$.

On en déduit le tableau de variation de P'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$P''(x)$		- 0 +	
$P'(x)$	$+\infty$	p	$+\infty$

Si $p \geq 0$ alors $\forall x \neq 0, P'(x) > 0$ et $P'(0) = 0$ ce qui montre que P est strictement croissante, comme $2m + 1$ est impair

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$$

Cela montre que P est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} , donc il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$.

Si $p < 0$ alors il existe deux réels $\beta < 0$ et $\gamma > 0$ tels que $P'(\beta) = P'(\gamma) = 0$ et tels que le signe de P' soit strictement positif sur $]-\infty, \beta[\cup]\gamma, +\infty[$ et strictement négatif sur $]\beta, \gamma[$. comme $2m + 1$ est impair

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$$

On en déduit le tableau de variation de P

x	$-\infty$	β	γ	$+\infty$	
$P'(x)$	+	0	-	0	+
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow P(\beta)$	$\searrow P(\gamma)$	$\nearrow +\infty$	

Si $P(\beta)$ et $P(\gamma)$ sont strictement positifs ou strictement négatifs ($P(\beta)P(\gamma) > 0$) alors P n'a qu'une racine.

Si $P(\beta)$ ou $P(\gamma)$ est nul ($P(\beta)P(\gamma) = 0$), remarque les deux ne peuvent pas être nul en même temps alors P a deux racines.

Si $P(\alpha) > 0$ et $P(\beta) < 0$ alors P a trois racines.

Allez à : **Exercice 19** :