CHAPITRE 2: CODIFICATION ET REPRÉSENTATION DES NOMBRES

Plan

- Les entiers positifs
- Les entiers négatifs
- Les nombres réels

Plan

Les entiers positifs

- Systèmes d'énumérations
- Conversion entre les bases
- Arithmétique

Les entiers négatifs

- Signe et valeur absolue
- Complément à un
- Complément à deux
- Arithmétiques

Les nombres réels

- Les bases et les nombres réels
- Représentation des nombres réels
- Arithmétiques

Plan

Les entiers positifs

- Systèmes d'énumérations
- Conversion entre les bases
- Arithmétique

Les entiers négatifs

- Signe et valeur absolue
- Complément à un
- Complément à deux
- Arithmétiques

Les nombres réels

- Les bases et les nombres réels
- Représentation des nombres réels
- Arithmétiques

Les entiers positifs

Les entiers positifs

- Systèmes d’énumérations
- Conversion entre les bases
- Arithmétique

Les entiers positifs

- Systèmes d’énumérations
- Conversion entre les bases
- Arithmétique

Les entiers positifs: Systèmes d'énumérations

- Le système décimal
- Le système binaire
- Le système octal
- Le système hexadécimal

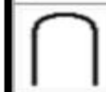
Les entiers positifs: Systèmes d’énumérations

- Le système décimal
- Le système binaire
- Le système octal
- Le système hexadécimal

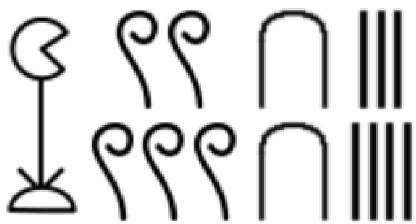
- Écrire un nombre décimal date de milliers d'années
- On n'utilise pas forcément une **numérotation décimale** pour écrire un **nombre décimal**

Numérotation décimale /= nombre décimal

Exemple: les égyptiens (4000ans A.JC)

	1	Un bâton évoque l'unité
	10	Une anse de panier peut contenir environ 10 objets
	100	Un rou… hiéroglyphes
	1 000	Une fl…
	10 000	Un doigt montrant le ciel nocturne car on y voit près de 10 000 étoiles
	100 000	Un têtard car on en trouve de l'ordre de 100 000 après la ponte
	1 000 000 ou Infini	Un dieu agenouillé supportant le ciel car le dieu est éternel et 1 million d'années est synonyme d'éternité

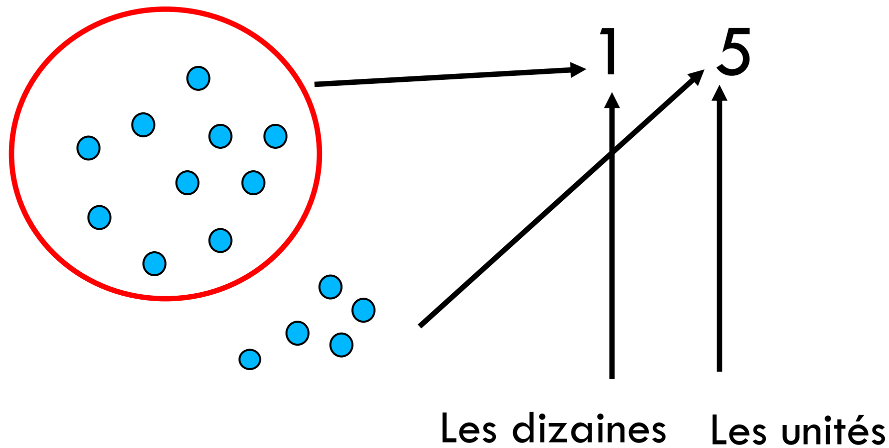
Par exemple, le nombre 1 527 s'écrira :



Le système décimal

- Les musulmans ont **utilisé** le « **0** » pour faciliter les opérations de **calcul** (inspiration de l'inde).
- Ils sont aussi parmi les premiers à utiliser la **numérotation décimale** pour **écrire** et **calculer** en base décimale.

Supposons qu'on a 15 jetons , si on forme des groupes de 10 jetons. On va obtenir 1 seul groupe et il reste 5 jetons.



Les entiers positifs: Systèmes d’énumérations

On utilise dix symboles différents « Numérotation »:

{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 }

Nombre décimal: $\boxed{2}\ 3\ 3\ 4\ 5\ 6\ \boxed{7}$

Poids fort

Poids faible

$\boxed{\mathbf{345}}\ ,\ \boxed{\mathbf{567}}$

Partie entière

Partie fractionnelle

Les entiers positifs: Systèmes d'énumérations

Soit le nombre **décimal** « 1978 », ce nombre peut être écrit sous la forme suivante :

$$1978 = 1*10^3 + 9*10^2 + 7*10^1 + 8*10^0$$

$$1978,265 = 1*10^3 + 9*10^2 + 7*10^1 + 8*10^0 + 2*10^{-1} + 6*10^{-2} + 5*10^{-3}$$

Cette forme s'appelle la forme polynomiale

Les entiers positifs: Systèmes d'énumérations

De la même façon pour les autres bases, on vas identifier:

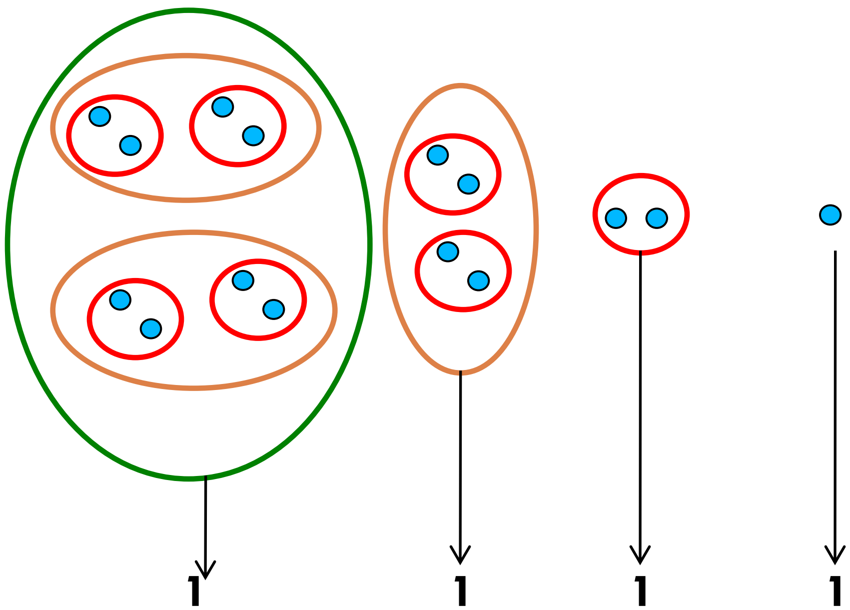
- Les symboles (numérotation),
- Le poids faible, le poids fort,
- la partie entière, la partie fractionnelle,
- La forme polynomiale

Les entiers positifs: Systèmes d'énumérations

- Le système décimal
- Le système binaire
- Le système octal
- Le système hexadécimal

Les entiers positifs: Systèmes d’énumérations

Supposons qu’on a 15 jetons , si on forme des groupes de 2 jetons, ensuite des groupes de 2 à 2 consécutivement:



Le nombre 1111 est la représentation du nombre décimal « 15 » dans la base 2

Les entiers positifs: Systèmes d'énumérations

- Dans le système binaire, pour exprimer n'importe quelle valeur on utilise uniquement **2 symboles : { 0 , 1}**

La base

$$(\boxed{1}\,1\,1\,0)_2$$

Un bit

$$(\boxed{1}\;1\;\boxed{1}\,0)_2$$

Le bits du poids forts

Le bits du poids faible

Les entiers positifs: Systèmes d'énumérations

Un nombre dans la base 2 peut être écrit aussi sous la forme polynomiale

$$(1110)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0$$

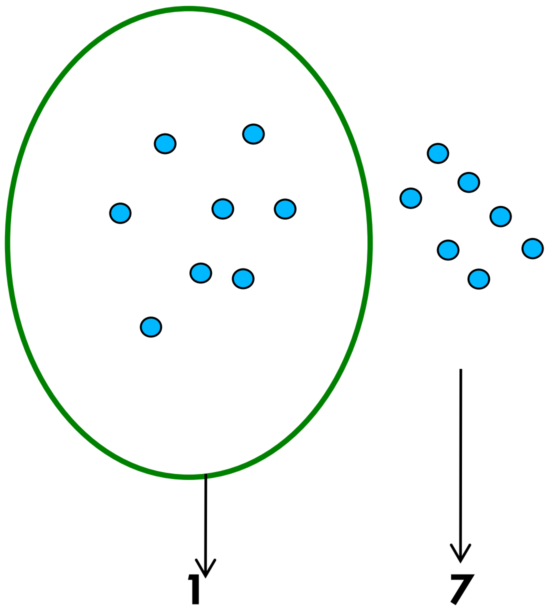
$$(1110,101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3}$$

Systèmes d'énumérations

- Le système décimal
- Le système binaire
- Le système octal
- Le système hexadécimal

Les entiers positifs: Systèmes d'énumérations

Supposons qu'on a 15 jetons , si on forme des groupes de 8 jetons, ensuite des groupes 8 à 8 consécutivement:



Le nombre 17 est la représentation du nombre décimal « 15 » dans la base 8

8 symboles sont utilisés dans ce système:

$$\{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 \}$$

Exemple de forme polynomiale :

$$(127)_8 = 1*8^2 + 2*8^1 + 7*8^0$$

$$(127,65)_8 = 1*8^2 + 2*8^1 + 7*8^0 + 6*8^{-1} + 5*8^{-2}$$

Exemple 2 :

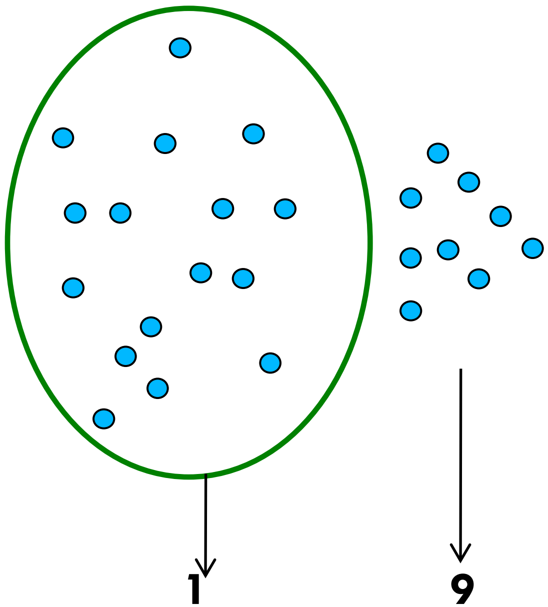
Le nombre (1289) n'existe pas dans la base 8 puisque les symboles 8 et 9 n'appartiennent pas à la base .

Systèmes d'énumérations

- Le système décimal
- Le système binaire
- Le système octal
- Le système hexadécimal

Les entiers positifs: Systèmes d'énumérations

Supposons qu'on a 25 jetons , si on forme des groupes de 16 jetons, ensuite des groupes 16 à 16 consécutivement:



Le nombre 19 est la représentation du nombre décimal « 25 » dans la base 16

Les entiers positifs: Systèmes d'énumérations

On utilise seize 16 symboles différents:

{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A, B, C, D, E, F}

Exemple de forme polynomiale:

$$(17)_{16} = 1*16^{1} + 7*16^{0}$$

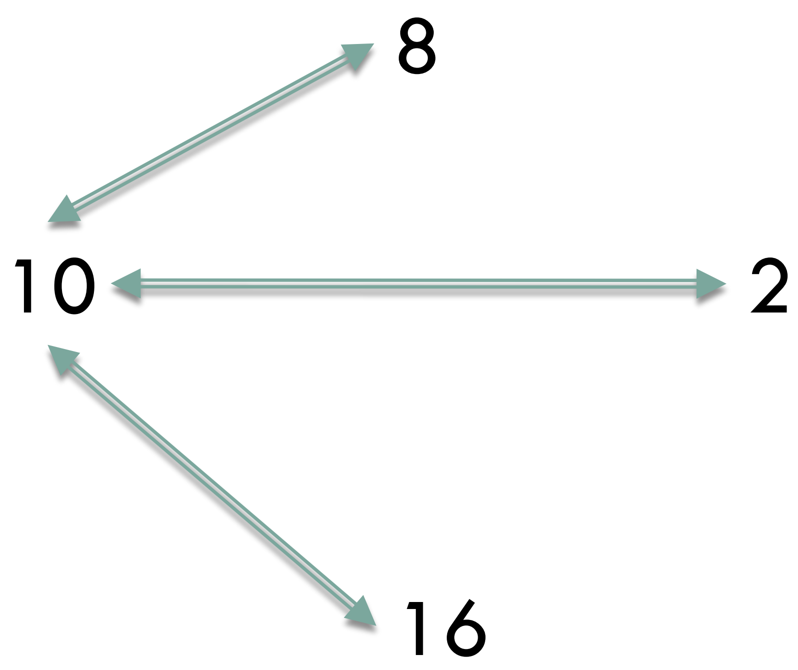
$$(AB)_{16} = A*16^{1} + B*16^{0} = 10*16^{1} + 11*1$$

Généralisation : le système B:

- Dans une base B , on utilise B symboles distincts pour représenter les nombres.
- La valeur de chaque symbole doit être strictement inférieur à la base B.
- Chaque nombre dans une base B peut être écrit sous sa forme polynomiale .

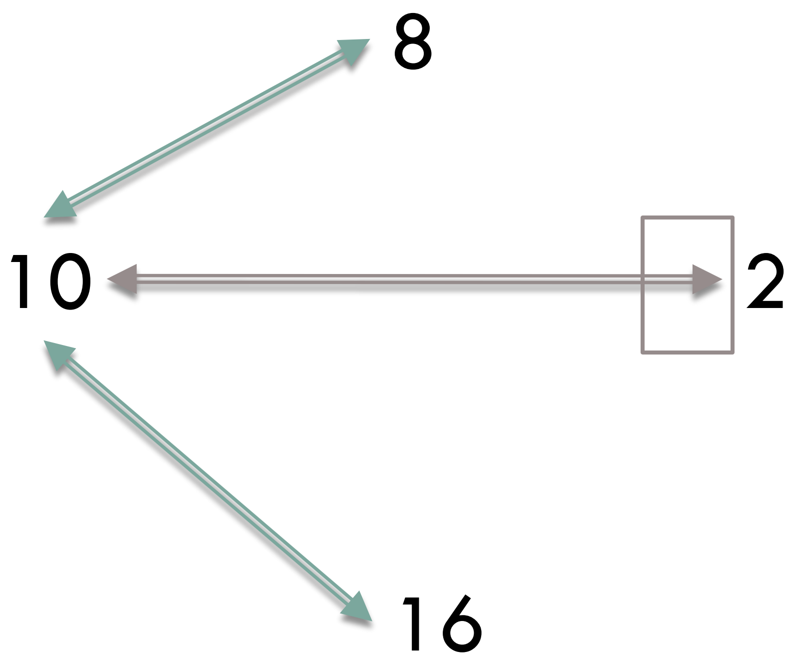
- Systèmes d'énumérations
- Conversion entre les bases
- Arithmétique

- Nous allons étudier les 4 bases: 2, 8, 10, 16



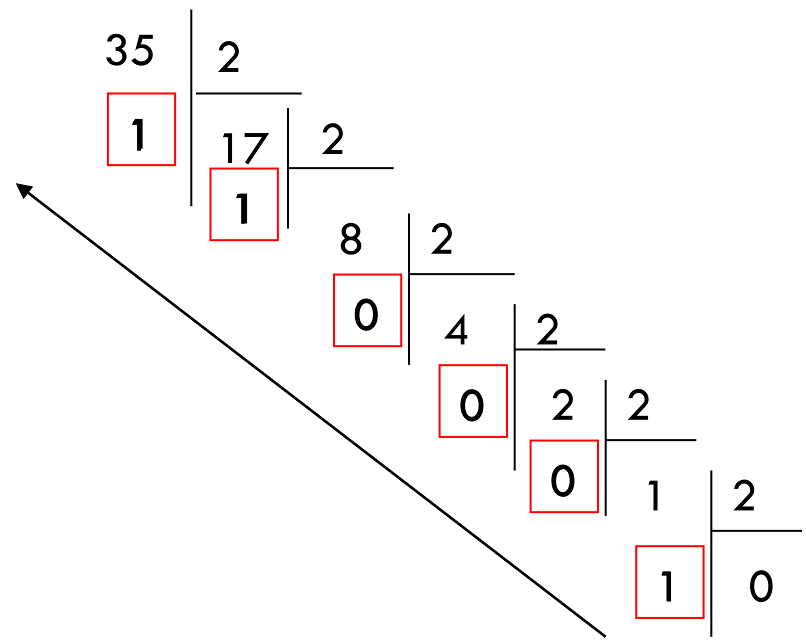
Les entiers positifs: Conversion entre les bases

10 vers 2



10 vers 2

$(35)_{10}=(?)_2$



Après division :

on obtient : $(35)_{10}=(100011)_2$

10 vers 2

$35,625 = (?)_2$

P.E= 35 = $(100011)_2$

PF= 0,625 = $(?)_2$

$0,625 * 2 = 1,25$
$0,25 * 2 = 0,5$
$0,5 * 2 = 1,0$

$(0,625)_{10} = (0,101)_2$

Donc $(35,625)_{10} = (100011,101)_2$

10 vers 2

$(0,6)_{10}=(?)_2$

$0,6 * 2 = 1,2$

$0,2 * 2 = 0,4$

$0,4 * 2 = 0,8$ → $(0,6)= (0,1001)_2$

$0,8 * 2 = 1,6$

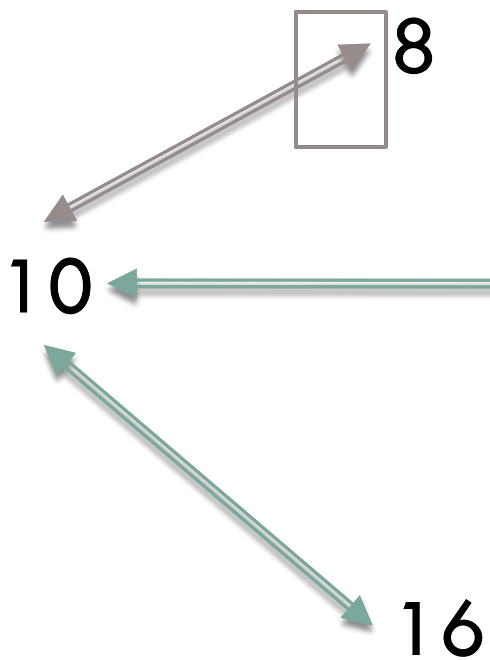
$0,6 * 2 = 1,2$

$0,2 * 2 = 0,4$

$0,4 * 2 = 0,8$

$0,8 * 2 = 1,6$

10 vers 8



Les entiers positifs: Conversion entre les bases

10 vers 8

$(43)_{10} = (?)_8$

$$
\begin{array}{r|l}
43 & 8 \\
\cline{2-2}
\boxed{3} & \begin{array}{r|l} 5 & 8 \\ \cline{2-2} \boxed{5} & 0 \end{array}
\end{array}
$$

$(43)_{10} = (53)$

$(0{,}6)_{10} = (?)_8$

$0{,}6 * 8 = \mathbf{4}{,}8$

$0{,}8 * 8 = \mathbf{6}{,}4$

$0{,}4 * 8 = \mathbf{3}{,}2$

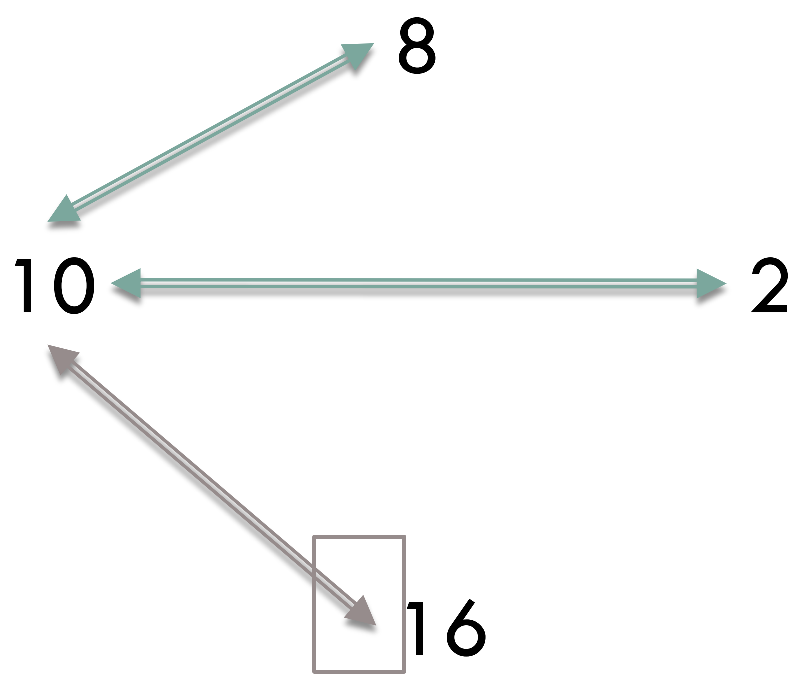
$0{,}2 * 8 = \mathbf{1}{,}6$

$0{,}6 * 8 = 4{,}8$

$(0{,}6)_{10} = (0{,}4631)_8$

Les entiers positifs: Conversion entre les bases

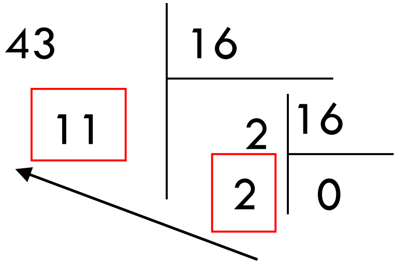
10 vers 16



Les entiers positifs: Conversion entre les bases

10 vers 16

$(43)_{10}=(2B)_{16}$



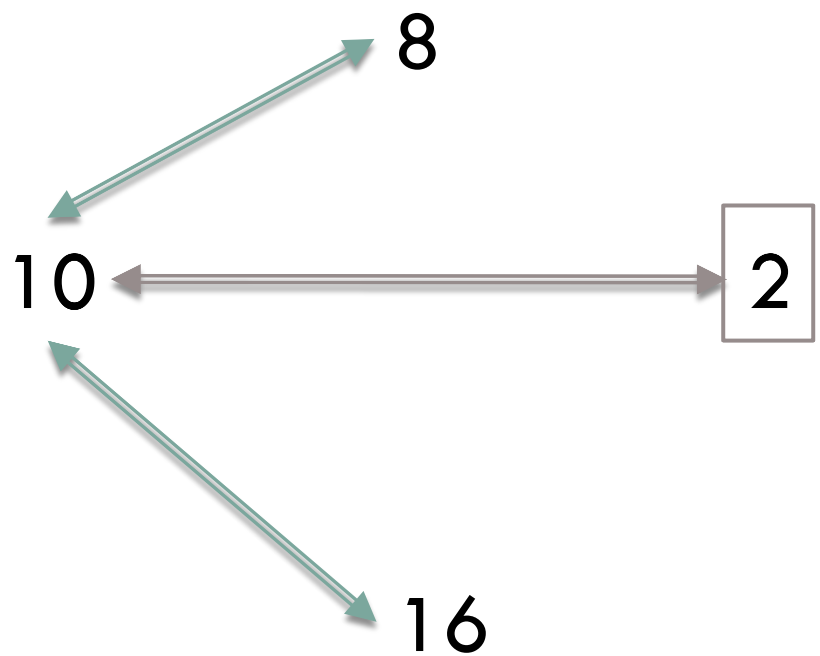
$(43)_{10}=(2B)_{16}$

$(0,6)_{10}=(0,9)_{16}$

0,6*16= **9**,6

0,6*16 =**9**,6

2 vers 10



2 vers 10

On vas utiliser la forme polynomiale

$$(1101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = (13)_{10}$$

$$(1101,101)_2 = 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} = (13,625)_{10}$$

Les entiers positifs: Conversion entre les bases

2 vers 10

Sur un seul bit : 0 , 1

Sur 2 bits

Décimal	Binaire
0	00
1	01
2	10
3	11

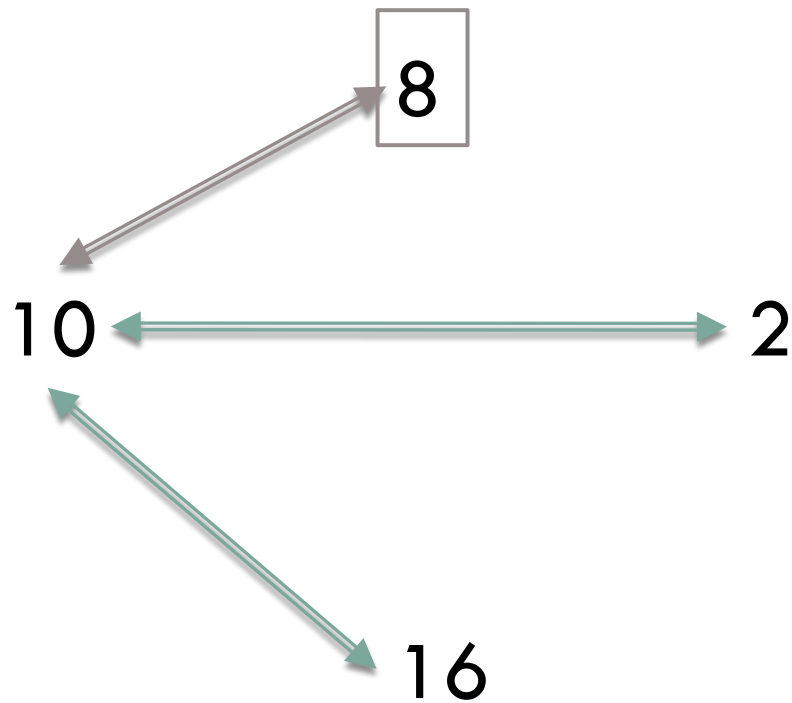
4 combinaisons= 2^2

Sur 3 Bits

Décimal	Binaire
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

8 combinaisons= 2^3

8 vers 10



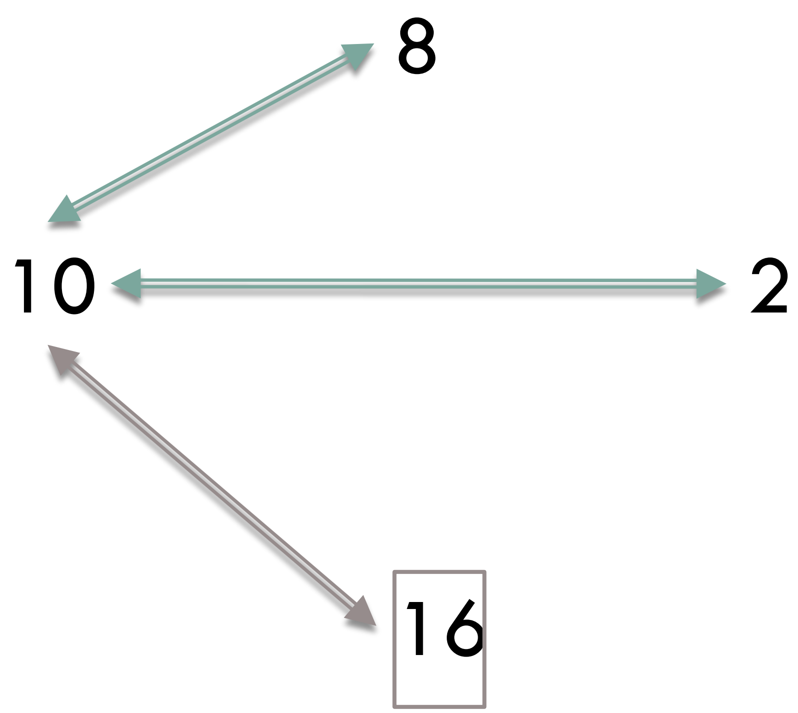
Les entiers positifs: Conversion entre les bases

8 vers 10

$$(127)_8 = 1*8^2 + 2*8^1 + 7*8^0 = (87)_{10}$$

$$(127,8)_8 = 1*8^2 + 2*8^1 + 7*8^0 + 8*8^{-1} = (87,1)_{10}$$

16 vers 10

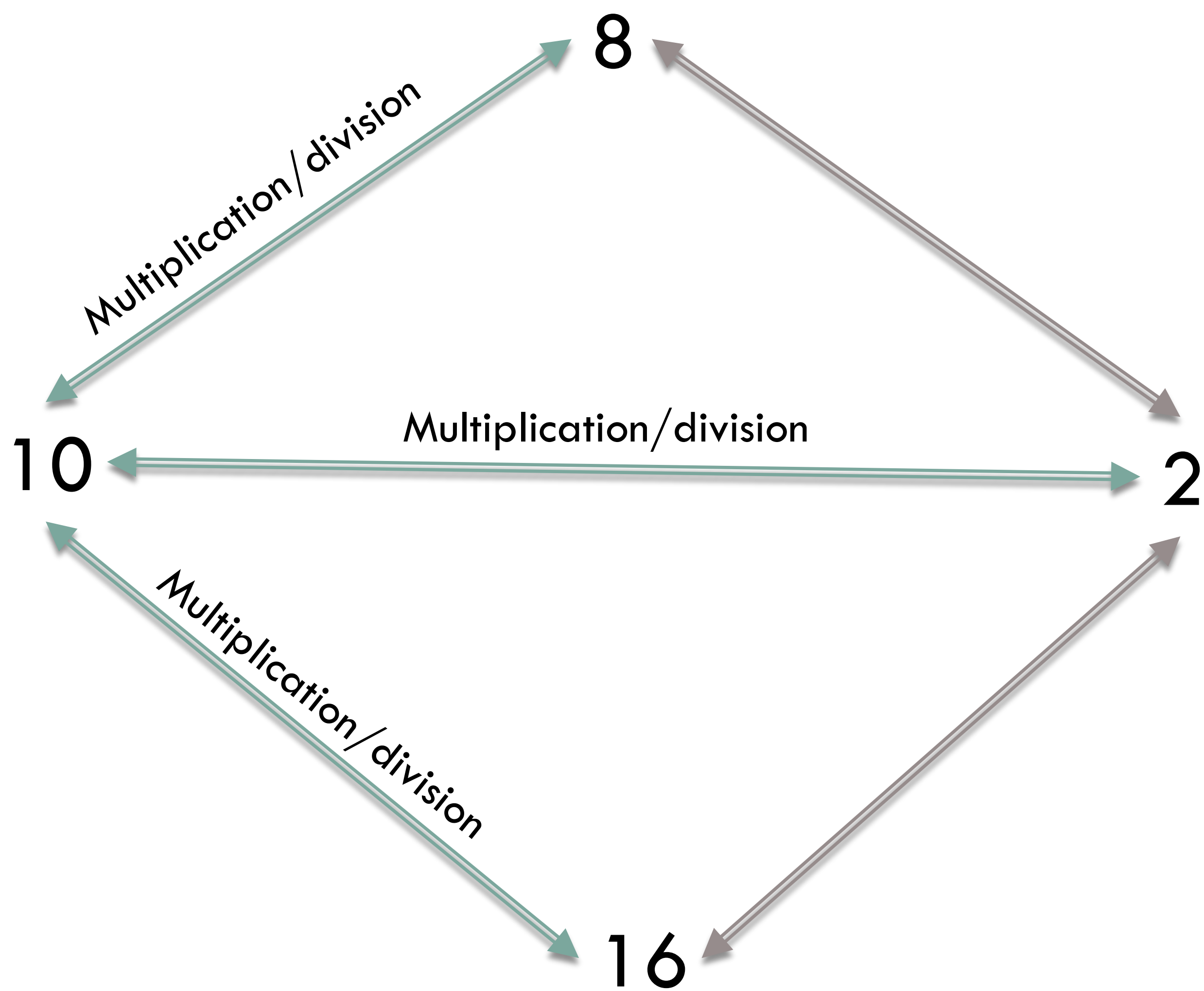


16 vers 10

$$(17)_{16} = 1*16^1 + 7*16^0 = (23)_{10}$$

$$(\mathrm{AB})_{16} = A*16^1 + B*16^0 = 10*16^1 + 11*1 = (171)_{10}$$

Les entiers positifs: Conversion entre les bases



Les entiers positifs: Conversion entre les bases

8 vers 2

En octal chaque, symbole de la base s'écrit sur 3 bits en binaire.

Exemples :

$(345)_8=(\underline{011}\ \underline{100}\ \underline{101})_2$

$(65{,}76)_8=(\underline{110}\ \underline{101},\ \underline{111}\ \underline{110})_2$

$(35{,}34)_8=(\underline{011}\ \underline{101}\ ,\ \underline{011}\ \underline{100})_2$

Octal	Binaire
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

2 vers 8

Faire des regroupements de 3 bits à partir du poids faible.

Exemple :

$(11001010010110)_2=(\underline{011}\ \underline{001}\ \underline{010}\ \underline{010}\ \underline{110})_2=(31226)_8$

$(110010100,10101)_2= (\underline{110}\ \underline{010}\ \underline{100}\ ,\ \underline{101}\ \underline{010})_2=(624,52)_8$

Les entiers positifs: Conversion entre les bases

16 vers 2 / 2 vers 16

Des regroupements/

Remplacement sur 4 bits

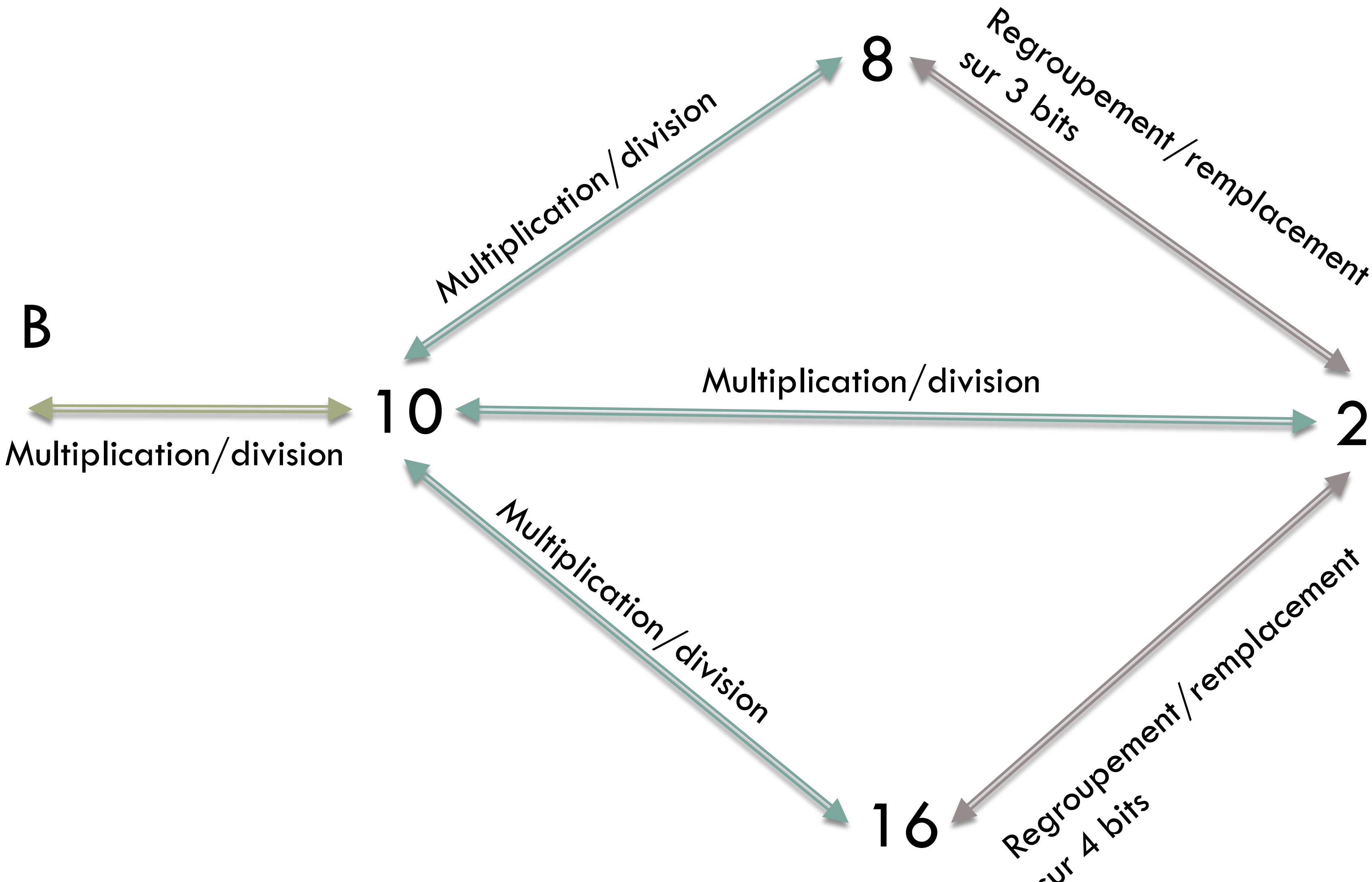
Exemple :

$(345B)_{16}=(\underline{0011}\ \underline{0100}\ \underline{0101}\ \underline{1011})_2$

$(\underline{1010}\ \underline{1011}\ \underline{0011}\ ,\ \underline{0100}\ \underline{1111}\ \underline{0110})_2 = (AB3{,}4F6)_{16}$

Hexa	Binaire
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Les entiers positifs: Conversion entre les bases



Les entiers positifs

- Systèmes d'énumérations
- Conversion entre les bases
- Arithmétique

Les entiers positifs: Arithmétique

- Addition: 2, 8, 16
- Soustraction: 2, 8, 16
- multiplication: 2, 8, 16

Addition binaire

$$
\begin{array}{cr}
 & 1 \\
 & 1 \\
+ & 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cr}
 & 0 \\
+ & 0 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cr}
 & 0 \\
+ & 1 \\
\hline
 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cr}
 & 1 \\
+ & 0 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & 1 & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Addition Octale

	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$		
	4	3	6	5
+		4	5	1
	$\boxed{5}$	$\boxed{8}$	$\boxed{11}$	$\boxed{6}$

En octal 8 s'écrit 10

$\boxed{0}$

En octal 11 s'écrit 13

$\boxed{3}$

Le résultat final : $\mathbf{(5036)_8}$

Les entiers positifs: Arithmétique

Addition Hexadécimal

1

4 8 6 5

\+ 7 A 5 1

12 18 11 6

C

En hexa 18 s'écrit 12

2

En hexa 11 s'écrit B

B

Le résultat final : $(\mathbf{C2B6})_{16}$

Soustraction binaire

$$
\begin{array}{rr} & {}^{1}\,0 \\ + & {}^{1}\quad 1 \\ \hline & 1 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} & 0 \\ - & 0 \\ \hline & 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} & 1 \\ - & 1 \\ \hline & 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rr} & 1 \\ - & 0 \\ \hline & 1 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & {}_{1}1 & {}_{1}0 & 1 & 1 & {}_{1}0 & {}_{1}0 & {}_{1}0 \\
- & 0 & 0 & 0 & {}_{1}0 & {}_{1}1 & 1 & 0 & {}_{1}0 & {}_{1}1 & {}_{1}1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Soustraction Octal

$$\begin{array}{rccc} & 5 & {}_{1}2 & 4 \\ - & {}_{1}2 & 6 & 3 \\ \hline & 2 & 4 & 1 \end{array}$$

Soustraction Hexadécimale

```
   B  4
     1
   5  A
 1
 ------
   5  A
```

Multiplication binaire

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\times & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

Multiplication octal

$$
\begin{array}{r}
4407 \\
\times \quad 2356 \\
\hline
33052 \\
26443 \\
15425 \\
+ \quad 11016 \\
\hline
13100202
\end{array}
$$

Multiplication Hexadécimale

```
      EF12
      3456
  ----------
     59A6C
    4AB5A
   3BC48
+ 2CD36
---------------
   30DFF80C
```

Plan

- Les entiers positifs
- Les entiers négatifs
- Les nombres réels

Plan

Les entiers positifs

- Systèmes d'énumérations
- Conversion entre les bases
- Arithmétique

Les entiers négatifs

- Signe et valeur absolue
- Complément à un
- Complément à deux
- Arithmétiques

Les nombres réels

- Les bases et les nombres réels
- Représentation des nombres réels
- Arithmétiques

Les entiers négatifs

Les nombres négatifs

- Signe et valeur absolue: S.V.A
- Complément à 1: C1
- Complément à 2: C2

Signe et Valeur Absolue

S.V.A

Les nombres négatifs: S.V.A

- Si on travail sur n bits , alors le bit du poids fort est utilisé pour indiquer le signe :
  - 1 : signe négatif
  - 0 : signe positif
- Les autres bits (n -1) désignent la valeur absolue du nombre.

Exemple : Si on travail sur 4 bits.

1 $\boxed{001}$

Signe   Valeur absolue

1001 est la représentation de - 1

0 $\boxed{001}$

Signe   Valeur absolue

0001 est la représentation de + 1

Les nombres négatifs: S.V.A

Sur 3 bits on obtient :

signe	VA	valeur
0	00	+ 0
0	01	+ 1
0	10	+ 2
0	11	+ 3
1	00	- 0
1	01	- 1
1	10	- 2
1	11	- 3

- Les valeurs sont comprises entre [-3, +3]

Sur 3 bits nous avons des valeurs entre :

$[-(2^{(2)}-1),(2^{(2)}-1)]$

Sur n bits nous avons des valeurs entre :

$[-(2^{(n-1)}-1),(2^{(n-1)}-1)]$

Les nombres négatifs: C1

Complément à 1

C1

- On appel complément à un d'un nombre X un autre nombre X' tel que :

$$X+X'=2^n-1$$

n : est le nombre de bits.

Exemple:

$X = 6$, $n=4$, $X'= (2^4 - 1)-X=16-1-6=9$

$X = 0110$

$X'= 1001$

$0 = 1111$

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 1\ 0 \\ +\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

6

Le complément de 6

0

Les nombres négatifs: C1

- Pour trouver le complément à un d'un nombre, il suffit d'inverser tous les bits de ce nombre

Sur 4 Bits

0 1 1 0

↓ ↓ ↓ ↓

1 0 1 0

Sur 5 Bits

0 0 1 1 0

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

1 1 0 0 1

Exemple:

Quelle est la valeur décimale représentée par la valeur 101010 en complément à 1 sur 6 bits ?

$C1(101010) = (010101)_2 = (\ 21)_{10}$

$101010 = -(\ 21)_{10}$

Les nombres négatifs: C1

Valeur en CA1	Valeur décimal
000	+ 0
001	+ 1
010	+ 2
011	+ 3
100	- 3
101	- 2
110	- 1
111	- 0

Les nombres négatifs: C2

Complément à 2

C2

Les nombres négatifs: C2

Le principe du complément à deux est simple :

- Calculer le C1
- Rajouter un 1 au résultat

$$C2=C1+1$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C2}(01000101) &= \mathbf{C1}(01000101) + 1\\ &= 10111010 + 1\\ &= 10111011\end{aligned}$$

Les nombres négatifs: C2

Exemple 2

Quelle est la valeur décimale représentée par la valeur 101010 en complément à deux sur 6 bits ?

- Valeur = - CA2(101010)

  = - (010101 + 1)

  = - $(010110)_2$= - (22)

Méthode 2

Parcourir les bits à partir du poids faible et garder tous les bits avant le premier 1 et inverser les autres bits qui viennent après.

0 1 0 0 0 1 0 1

1 0 1 1 1 0 1 1

1 1 0 1 0 1 0 0

0 0 1 0 1 1 0 0

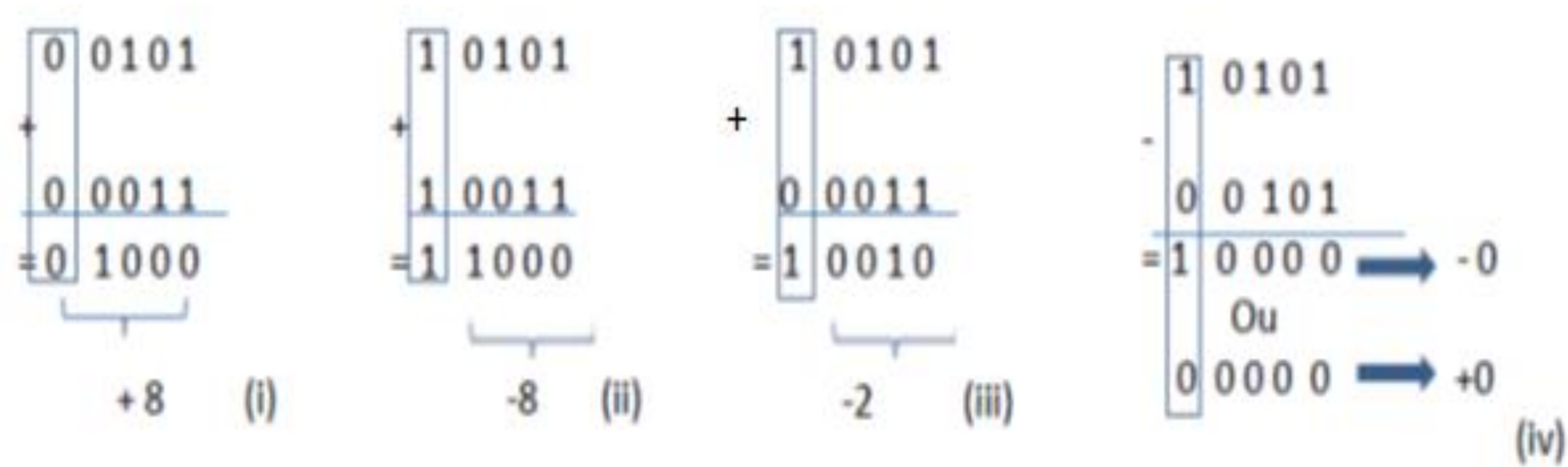
Les nombres négatifs: C2

Valeur en CA2	**valeur**
000	+ 0
001	+ 1
010	+ 2
011	+ 3
100	- 4
101	- 3
110	- 2
111	- 1

$$[-(2^{(n-1)}),(2^{(n-1)}-1)]$$

Les nombres négatifs: Arithmétiques

Arithmétique SVA



Les nombres négatifs: S.V.A

- On remarque que le zéro possède deux représentations +0 ce qui conduit à des difficultés au niveau des opérations arithmétiques.

- On fait comment pour additionner deux nombre de signe différent?: impossible dans le cas du SVA

$$\begin{array}{r} \;0\;0\;0\;1 \\ +\;1\;0\;1\;0 \\ \hline 1\;0\;1\;1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \;1\;0\;0\;1 \\ +\;1\;0\;1\;0 \\ \hline 0\;0\;1\;1 \end{array}$$

Les nombres négatifs: Arithmétiques

Arithmétique C1

```
+5      0101
-6      1001
------------
-1      1110
```

```
         1
-5      1010
-6      1001
------------
        0011
          +1
------------
        0100
```

```
         1
-5      1010
+6      0110
        0000
          +1
------------
+1      0001
```

```
-3      1100
-4      1011
        0111
          +1
------------
-7      1000
```

```
     1 1         1         1
       1 1 0 0 1 1 0 0 0 1
+      0 1 1 0 0 1 1 0 0 1
--------------------------
=      0 0 1 1 0 0 1 0 1 0
                  +       1
--------------------------
=      0 0 1 1 0 0 1 0 1 1
```

Arithmétique C2

Les nombres négatifs: Arithmétiques

+9	+	0	1	0	0	1
+4		0	0	1	0	0
+13		0	1	1	0	1

Le résultat est positif

$(01101)_2 = (13)_{10}$

+9	+		0	1	0	0	1
-4			1	1	1	0	0
+5		$\boxed{1}$	0	0	1	0	1

Report

Le résultat est positif

$(00101)_2 = (5)_{10}$

Les nombres négatifs: Arithmétiques

- 9	1 0 1 1 1
- 4	+ 1 1 1 0 0
- 13	$\boxed{1}$ 1 0 0 1 1

Report

Le résultat est négatif :

Résultat = - CA2 (10011)= -(01101)

= - 13

- 9	1 0 1 1 1
+ 9	+ 0 1 0 0 1
+ 0	$\boxed{1}$ 0 0 0 0 0

Report

Le résultat est positif

$(00000)_2 = (0)_{10}$

Arithmétique C2

-3	1101
-4	1100
-7	1001

+3	0011
+4	0100
+7	0111

+5	0101
-6	1010
-1	1111

-5	1011
+6	0110
+1	0001

-5	1011
-6	1010
	0101

+5	0101
+6	0110
	1001

Résumé

	SVA	C1	C2
Intervalle possible	$[-2^{n-1}+1, 2^{(n-1)}-1]$	$[-2^{n-1}+1, 2^{n-1}-1]$	$[-(2^{(n-1)}), 2^{(n-1)}-1]$
Nombre positif	Représentation Simple	Représentation Simple	Représentation Simple
Nombre négatif	Valeur absolue avec le signe 1	Inverser les bits du nombre positif	Rajouter un 1 au C1
zéro	2 zéro	2 zéro	1 zéro
Arithmétique	?	?	Ok
Réels	?	?	?

Plan

Les entiers positifs

- Systèmes d'énumérations
- Conversion entre les bases
- Arithmétique

Les entiers négatifs

- Signe et valeur absolue
- Complément à un
- Complément à deux
- Arithmétiques

Les nombres réels

- Les bases et les nombres réels
- Représentation des nombres réels
- Arithmétiques

Plan

- Les entiers positifs
- Les entiers négatifs
- Les nombres réels

- Les bases et les nombres réels
- Représentation des nombres réels
- Arithmétiques

- Les bases et les nombres réels
- Représentation des nombres réels
- Arithmétiques

Les bases et les nombres réels: Base 2 vers la base 10

De base 2 vers la base 10

Exemple:

$$\begin{aligned} 11{,}0101_{(2)} &= 1\cdot 2^{1}+1\cdot 2^{0}+0\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+0\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-4} \\ &= 2+1+0+0{,}25+0+0{,}0625 \\ &= 3{,}3125_{(10)} \end{aligned}$$

Ceci est toujours valable pour les bases 8 et 16

De base 10 vers la base 2

Exemple 1:

$(0.375)_{10} = ?$

$$0.375 \times 2 = \boxed{0}.75$$
$$0.75 \times 2 = \boxed{1}.5$$
$$0.5 \times 2 = \boxed{1}.0$$

$(0.375)_{10} = (0.011)_2$

De base 10 vers la base 2

Exemple 2:

```
0,6875 x 2 = 1,375
0,375  x 2 = 0,75
0,75   x 2 = 1,5
0,5    x 2 = 1
```

$$(12{,}6875)_{10} = (1100{,}1011)_2$$

De base 10 vers la base 2

Exemple 3:

$(0.3)_{10} = \ ?$

$$
\begin{aligned}
0.3\times2 &= \boxed{0}.6\\
0.6\times2 &= \boxed{1}.2\\
0.2\times2 &= \boxed{0}.4\\
0.4\times2 &= \boxed{0}.8\\
0.8\times2 &= \boxed{1}.6\\
0.6\times2 &= \boxed{1}.2\\
&\ \ \ldots
\end{aligned}
$$

$(0.3)_{10} = (0.010011001)_2$

De base 10 vers la base 2

Exemple 4: $(0,3125)_{10} = (?)2$

0,3125	x	2	=	0,625	=	0
0,6250	x	2	=	1,250	=	1
0,2500	x	2	=	0,500	=	0
0,5000	x	2	=	1,000	=	1

De base 10 vers la base 16

Exemple : $(171,3046875)_{10} = (?)_{16}$

$$0,3046875 \times 16 = 4,875$$
$$0,875 \times 16 = 14,0$$

$$(171,3046875)_{10} = (AB,4E)_{16}$$

Les bases et les nombres réels : Résumé

- De la base B vers la base 10: appliquer toujours la forme polynomiale
- De la base 10 vers la base B: multiplication jusqu'a ce qu'on arrive au 1,0
- De la base 2 vers 8 et 16: (regroupement sur 3 ou 4 bits)
- De la base 8 et 16 vers 2: (représentation sur 3 ou 4 bits)

- Les bases et les nombres réels
- Représentation des nombres réels
- Arithmétiques

Virgule flottante

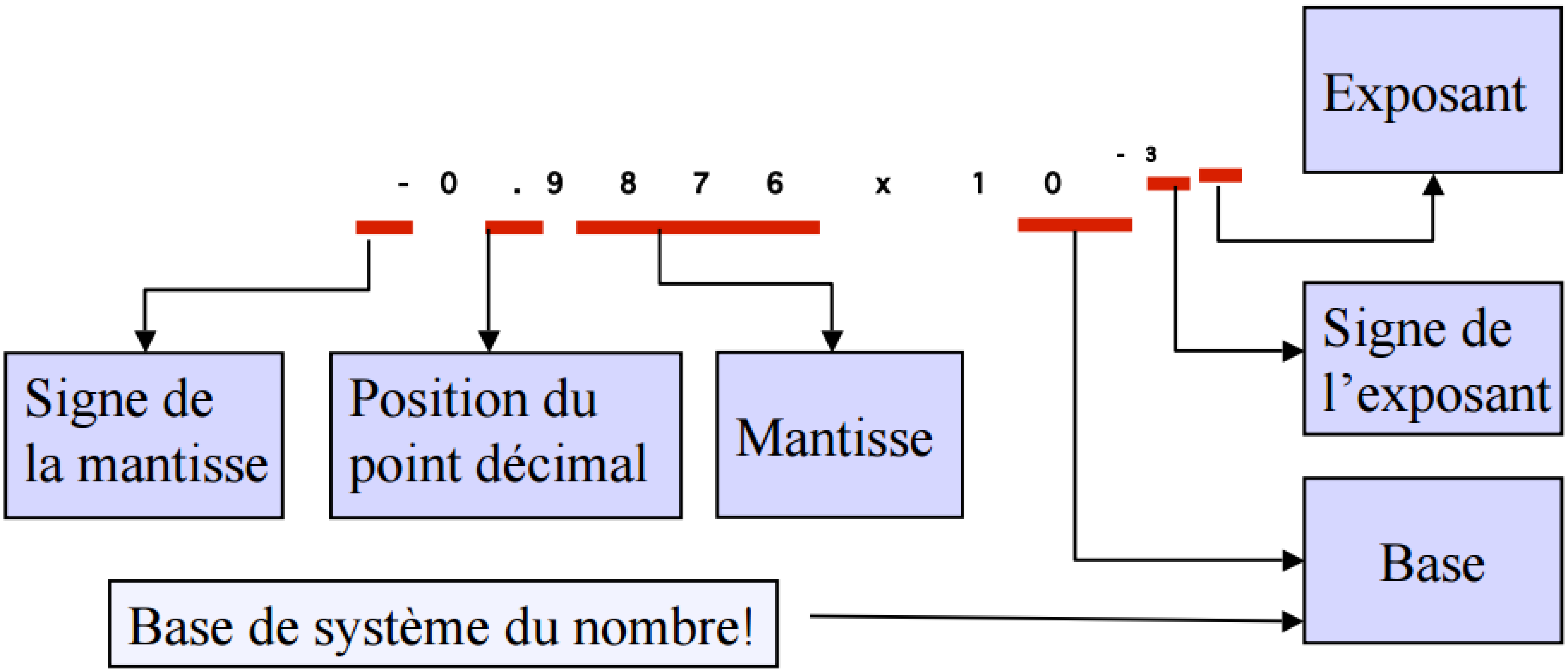
Les nombres réels à virgule flottante s'écrivent de manière scientifique :

$$\text{Nombre} = M \times B^{E}$$

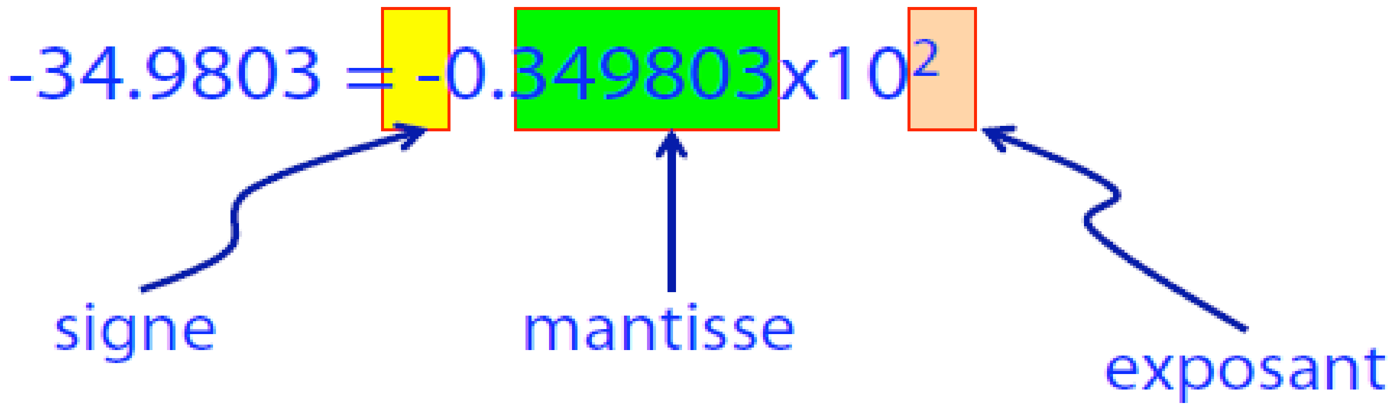
Avec

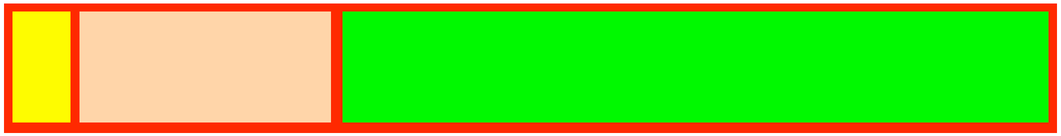
- M : Mantisse
- B : Base (2, 10, 16, ...)
- E : Puissance ou exposant

Virgule flottante



Virgule flottante





$15,6 = 0,156 \ * \ 10^{+2}$

$-(110,101)_2 = -(0,110101)_2 * 2^{+3}$

$(0,00101)_2 = (0,101)_2 * 2^{-2}$

Problème !!

Un même nombre réel peut être écrit de différentes façons.

Par exemple:

$0.110 \times 2^5 = 110 \times 2^2 = 0.0110 \times 2^6$

Pour éviter des représentations différentes du même nombre, **la mantisse est normalisée.**

- **un nombre binaire normalisé différent de zéro a la forme:**

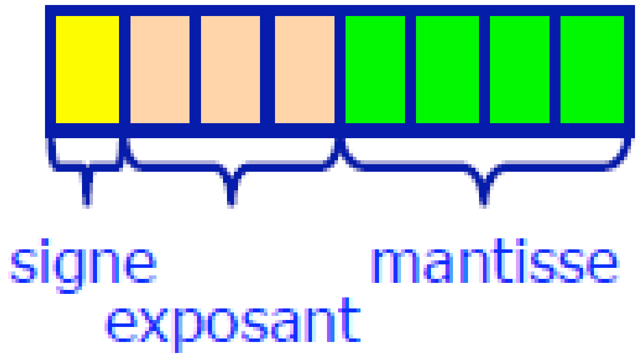
$$\pm \quad 1.bbb\ldots b \quad x \quad 2^{\pm e} \qquad \text{avec } b=0 \text{ ou } 1$$

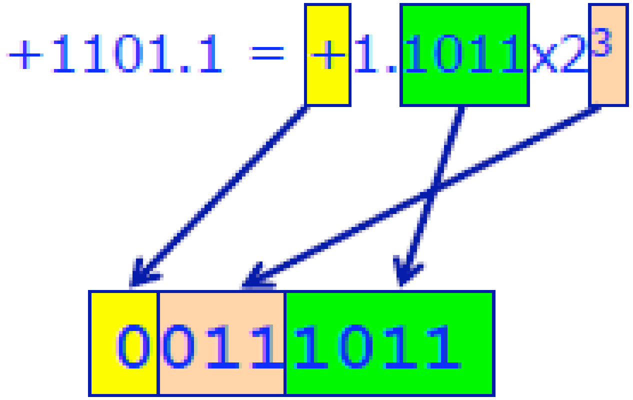
Exemples:

11,1001 = 1,11011* 2^1

1101,001= 1,101001* 2^3

Comme, sous cette forme, le bit le plus signifiant est toujours égal a 1, il n'est pas nécessaire de le coder: il est implicite

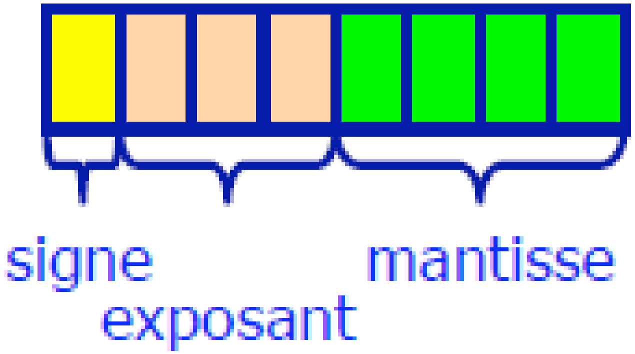




Cas exeptionnel

le nombre zéro est représenté avec tous les bits à 0

0.0 = 0 000 0000



L'exposant peut être négatif:

Pour la représentation de l'exposant on utilise :

- Le complément à deux
- Exposant décalé ou biaisé

Représentation de l'exposant en complément à deux

- Exemple:
- On veut représenter les nombres $(0{,}015)_8$ et $-(15{,}01)_8$ en virgule flottante sur une machine ayant le format suivant :

Signe mantisse	Exposant en CA2	Mantisse normalisée
1 bit	4 bits	8 bits

$(0{,}015)_8=(0{,}000001101)_2= 1{,}101 * 2^{-6}$

Signe mantisse : positif (0)
Mantisse normalisé : 1,101
Exposant = -6 → utiliser le complément à deux pour représenter le -6
Sur 4 bits CA2(0110)=1010

0	1 0 1 0	1 0 1 0 0 0 0 0
1 bit	4 bits	8 bits

Représentation de l’exposant en Exposant Biaisé

- Avec l’exposant biaisé on a transformé les exposants négatifs à des exposants positifs en rajoutons à l’exposant la valeur $2^{k-1}-1$

Exposant Biaisé = Exposant réel + Biais

Exemple

- On veut représenter les nombres $(0{,}015)_8$ et $-(15{,}01)_8$ en virgule flottante sur une machine ayant le format suivant :

Signe mantisse	Exposant décalé	Mantisse normalisée
1 bit	4 bits	11 bits

$(0{,}015)_8=(0{,}000001101)_2= 1{,}101 * 2^{-6}$

Signe mantisse : positif (0)
Mantisse normalisé : 1,101
Exposant réel = -6
Calculer le biais : $b= 2^{4-1} -1= 7$
Exposant Biaisé = -6 + 7 = +1 = $(0001)_2$

0	0001	1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
1 bit	4 bits	11 bits

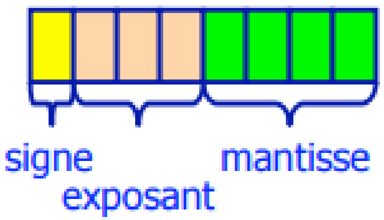
Exemple 2

- $(15,01)_8 = -(001101,000001)_2 = -1,101000001 * 2^3$

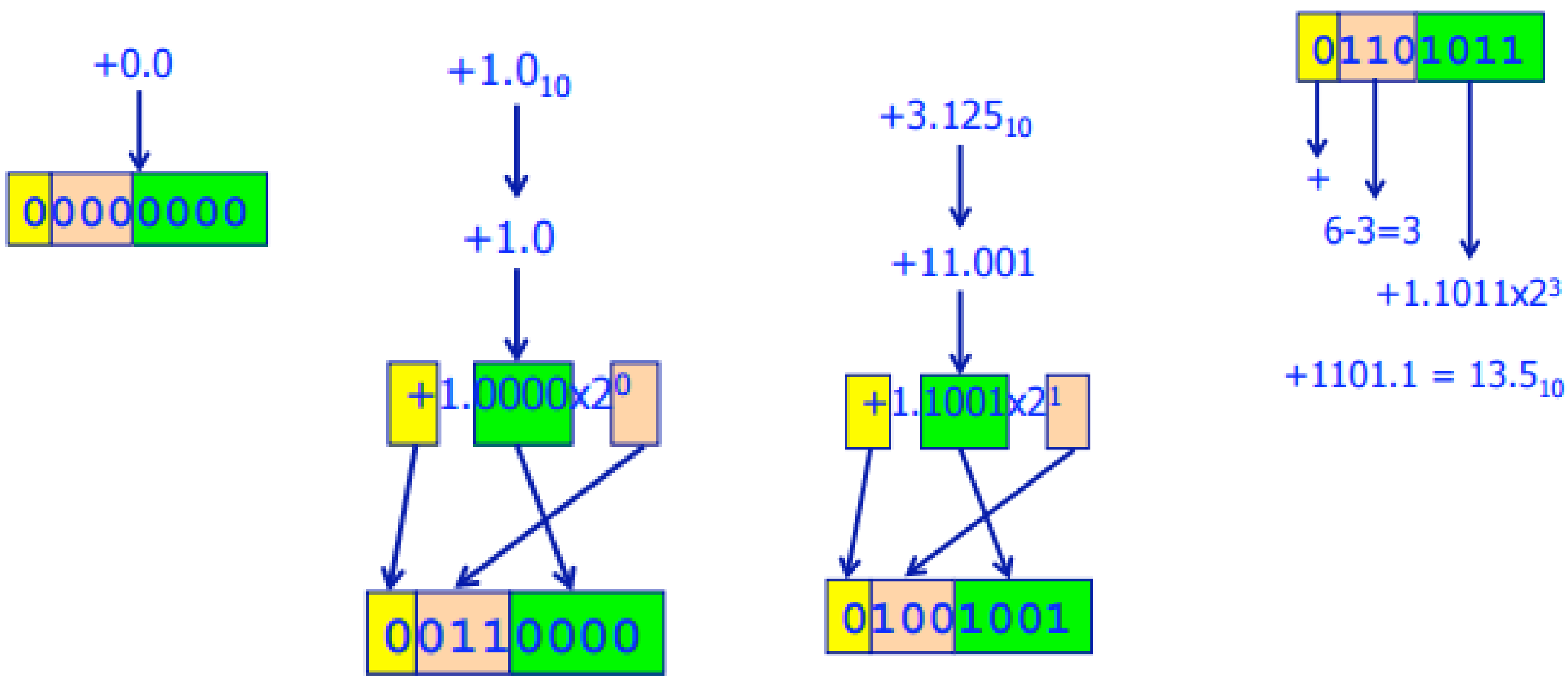
Signe mantisse : négatif (1)
Mantisse normalisée : 1,101000001
Exposant réel = + 3
Calculer le biais : b= 2^{4-1} -1= 7
Exposant Biaisé = 3 + 7 = +10 = $(1010)_2$

1	**1 0 1 0**	**1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0**
1 bit	4 bits	11 bits

D’autres exmples



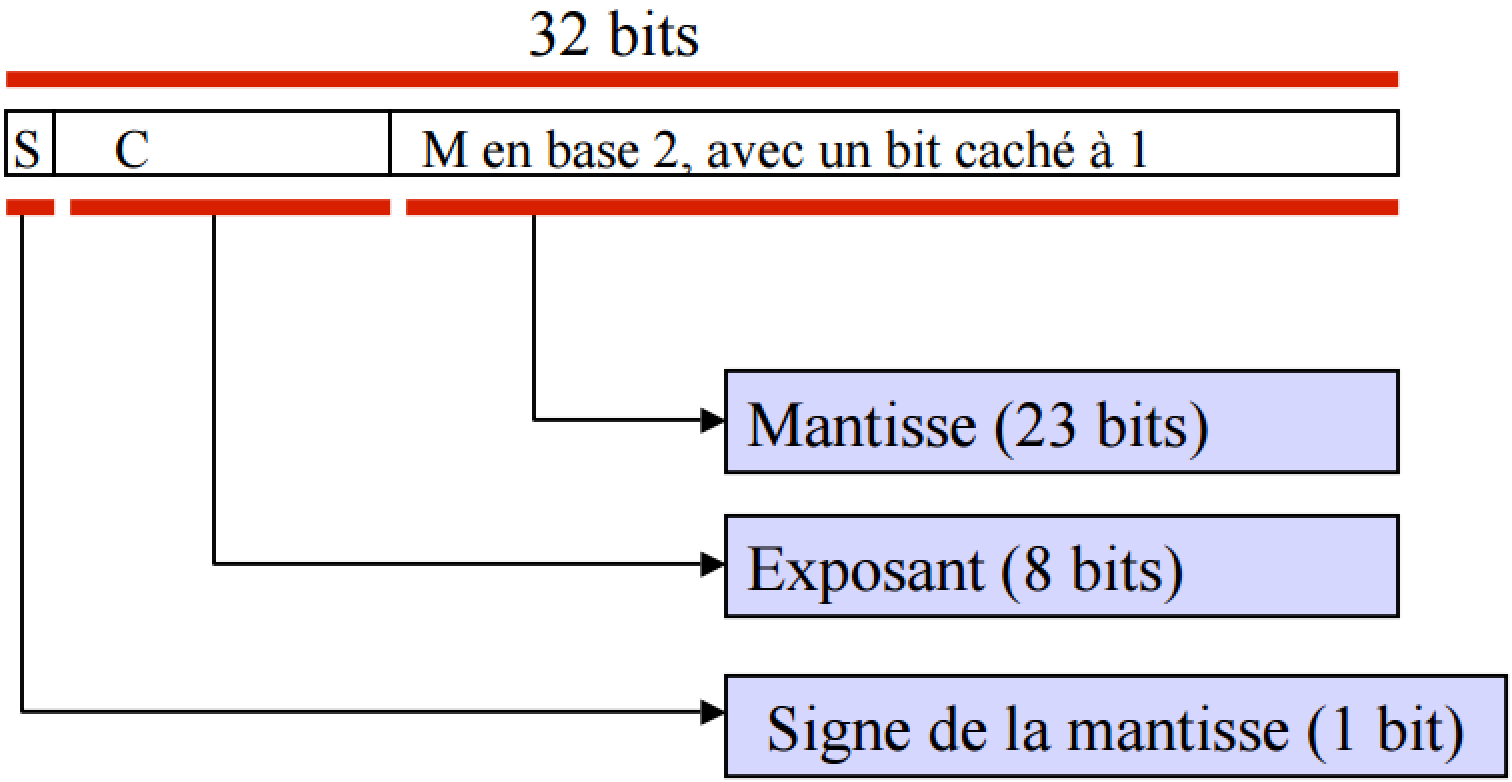
biais = $2^{3-1}-1 = 2^{2}-1 = 3$



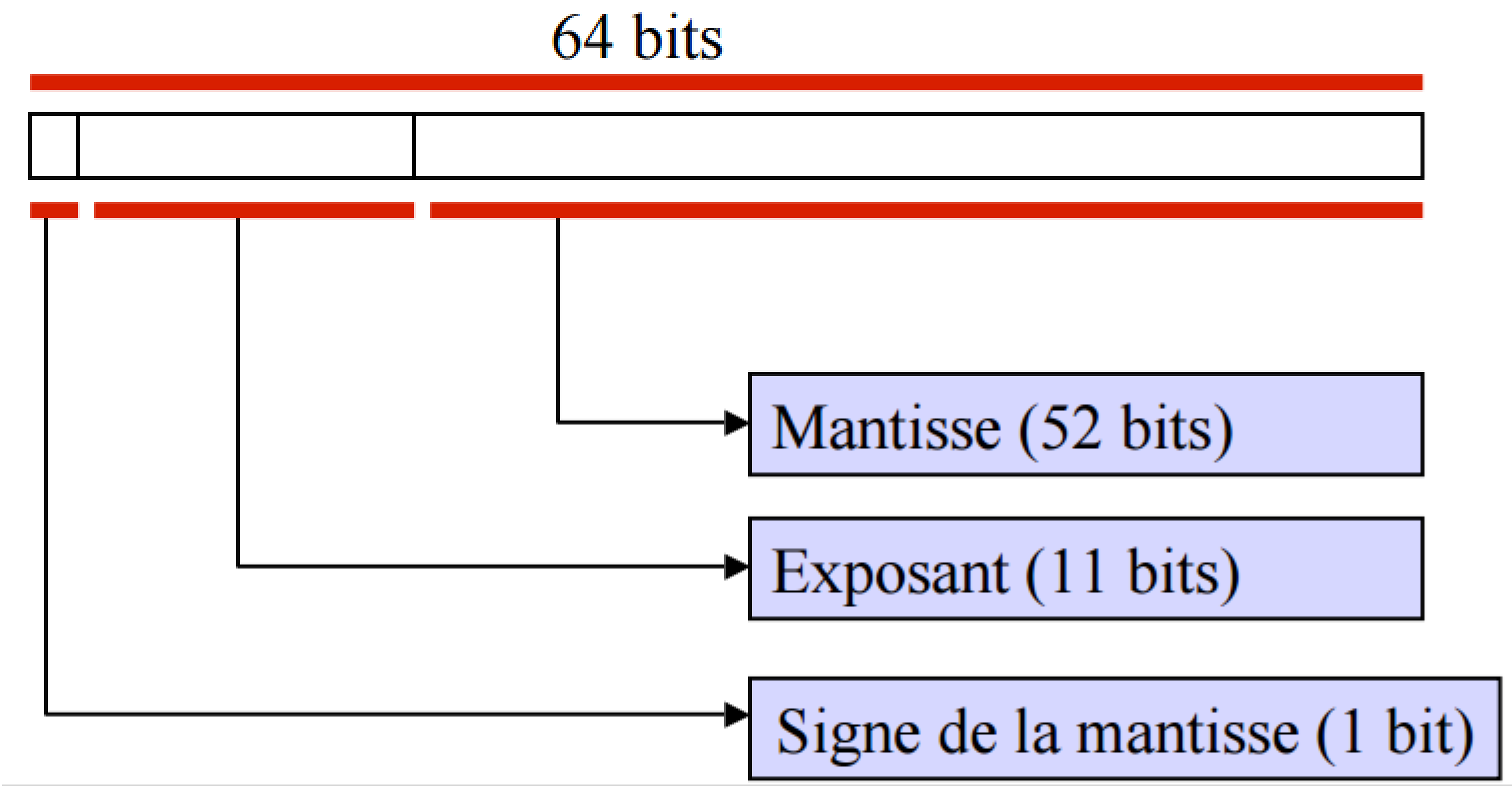
La norme IEEE 754

- Un format standardisé
- **Format simple précision**: 32 bits
  - Bit du signe (1 bit)
  - Exposant (8 bits)
  - Mantisse (23 bits)
- **Format double précision**: 64 bits
  - Bit du signe (1 bit)
  - Exposant (11 bits)
  - Mantisse (52 bits)

Format simple precision



Format double precision



- Les bases et les nombres réels
- Représentation des nombres réels
- Arithmétiques

Opérations arithmétiques en virgule flottante

- Soit deux nombres réels N1 et N2 tel que

  $N1=M1*b^{e1}$ et $N2=M2*b^{e2}$

- On veut calculer N1+N2 ?
- Deux cas se présentent :
  - Si e1 = e2 alors $N3= (M1+M2)\ b^{e1}$
  - Si e1 <> e2 alors élevé au plus grand exposant et faire l'addition des mantisses et par la suite normalisée la mantisse du résultat.

Exemple

- Effectuer l'opération suivante : $(0,15)_8 + (1,5)_8 = (?)$:

$(0,15)_8 = (0,001101) = 0,1101 \ *2^{-2}$

$(1,5)_8 = (001,\ 1\ \ 01) = 0,1101 \ *2^{1}$

$(0,15)_8 + (1,5)_8 = 0,1101 \ *2^{-2} + 0,1101 \ *2^{1}$

$= 0,0001101 \ *2^{1} + 0,1101 \ *2^{1}$

$= 1,110101 * 2^{0}$

0	0011	110101

1 bit 4 bits 6 bits

Exercice

Donner la représentation des deux nombres **N1= $(-0{,}014)_8$ et N2=$(0{,}14)_8$** sur la machine suivante :

Signe mantisse	Exposant biaisé (décalé)	Mantisse normalisée
1 bit	**5 bits**	**10 bits**

- Calculer **N2-N1** ?.